



UNIVERSIDAD NACIONAL
de MAR DEL PLATA
.....

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Sobre álgebras Jacobianas de dimensión finita

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Doctora en Matemática

PRESENTA:

Mg. Yadira Valdivieso Díaz

DIRECTOR DE TESIS:

Dra. Sonia Trepode

CODIRECTOR DE TESIS:

Dr. Christof Geiss

2014

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	V
Abstract	VII
Introducción	IX
1. Álgebras Jacobianas de carcajes con potenciales	1
1.1. Carcajes y álgebras de caminos	1
1.2. Mutaciones de carcajes	4
1.3. Mutaciones de carcajes con potenciales	5
1.4. Un potencial para carcajes cíclicamente orientados	10
2. Carcaj de Auslander-Reiten, categorías de conglomerado y n-anguladas	19
2.1. Carcaj de Auslander-Reiten	19
2.2. Categorías generalizadas de conglomerado	27
2.3. Categorías n-anguladas	31
2.3.1. Existencia y construcción de categorías n-anguladas	33
3. Álgebras Jacobianas de superficies con puntos marcados	37
3.1. Triangulaciones de superficies con puntos marcados	37
3.2. Carcaj con potencial de una triangulación ideal	44
3.2.1. El carcaj de una triangulación	44
3.2.2. El potencial de una triangulación	46

3.3. Álgebras Jacobianas de una esfera con punciones	49
4. Superficies cerradas con puntos marcados	57
4.1. Álgebras con categorías de módulos periódicas	57
4.2. Resultados principales y consecuencias	66
4.3. Álgebras 2-Calabi-Yau inclinadas simétricas	70
4.4. Categoría de módulos y categoría de conglomerado	74
4.5. Tipo de crecimiento de un álgebra Jacobiana	75
4.5.1. Superficies cerradas que no sean la esfera con 5 punciones	78
4.5.2. Esfera con 5 punciones	84
 Índice alfabético	 89
 Bibliografía	 89

Agradecimientos

Los resultados de esta tesis me han llevado por muchos lugares que nunca imaginé conocer, todo esto fue gracias al apoyo de mis directores Sonia Trepode y Christof Geiss. Quiero agradecer particularmente a Christof por aceptar dirigirme pese a las circunstancias y darme una gran ayuda en estos últimos años. También quiero agradecer a Michael, que estuvo al principio ayudándome y dándome el apoyo para venir a Argentina.

Esta tesis también me ha llevado a estar muchas horas dentro de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Mar del Plata, leyendo, aprendiendo, escribiendo y volviendo a aprender tantas cosas y al mismo tiempo tan pocas. Muchas de esas horas no hubieran existido si Nacho no hubiera estado junto a mi, animándome a trabajar y ha ser constante con el trabajo. No sólo eso, él fue el primero en leer muchas de las cosas que escribí, en escuchar muchas de mis primeras pláticas. Le quiero agradecer todo su apoyo, amor, el ser mi pareja, pero también ser mi compañero de oficina y de trabajo.

También quiero agradecer a mi mamá que siempre estaba pensando en mi, preocupándose, guardándose cosas para mis visitas anuales. A mi hermano por que siempre me ha apoyado y ayudado en todas y cada una de las cosas que necesite en este tiempo estando lejos de México y de mi familia. A mi hermana que siempre me saca una sonrisa cuando hablo con ella. A mi papá por siempre estar orgulloso de mi. Y a Paco porque siempre esta pendiente de mi y apoyando.

Quiero agradecer a mis amigas Nadia, Maricarmen y Jenny por esas cafés, comidas y buenos momentos que me permiten estar cerca de mi México. A mi amiga Ale, que aún cuando estamos lejos ella me escucha.

Quiero agradecer a Ana por escucharme, por ser mi amiga y permitirme hablar de matemáticas. Y claro a todo el grupo de álgebra junto al departamento de matemáticas que nos acogió a Nacho y a mi y que nos permitió encontrar un lugar en común.

Además, agradezco a mi jurado: Maria Julia, Mariano y Ralf, por leer este trabajo y darme sus observaciones y comentarios. Especialmente quiero agradecer a Ralf por aceptar leer esta tesis en español.

Finalmente quiero agradecer el apoyo económico que me dio CONICET todo este tiempo, así como el apoyo económico que me brindó el grupo de Teoría de Representaciones del departamento de matemáticas.

Resumen

Las álgebras Jacobianas de dimensión finita permiten construir categorías trianguladas, 2-Calabi-Yau y Hom-finitas con objetos inclinantes de conglomerado. En esta tesis se estudian dos problemas sobre álgebras Jacobianas.

El primer problema que abordamos es cuándo un álgebra Jacobiana es de dimensión finita. Como primer resultado determinamos bajo qué condiciones un carcaj con potencial, con ciertas restricciones sobre el carcaj, determina un álgebra Jacobiana de dimensión finita. A continuación estudiamos las álgebras Jacobianas asociadas a superficies cerradas con puntos marcados. En primer lugar mostramos que las álgebras Jacobianas provenientes de las esferas con $n > 4$ puntos marcados son de dimensión finita, dando una respuesta parcial a un problema abierto durante algunos años.

Recientemente se probó que las álgebras Jacobianas asociadas a superficies cerradas con puntos marcados son de dimensión finita, débilmente-simétricas y mansas.

Como segundo problema estudiamos la categoría de módulos estable de estas álgebras Jacobianas. Denotamos por $\Lambda_{\mathbb{T}}$ el álgebra Jacobiana asociada a una triangulación \mathbb{T} de una superficie cerrada con puntos marcados (S, M) . Como resultado principal de la tesis, probamos que la categoría de módulos indescomponibles estable de $\Lambda_{\mathbb{T}}$ consiste de tubos de rango uno o dos, y por tanto, es un álgebra donde todos los módulos indescomponibles no proyectivos son Ω -periódicos, donde Ω es el trasladado Heller o sizigia. Como consecuencia de este hecho, probamos que la categoría de conglomerado generalizada $\mathcal{C}_{(S, M)}$ de (S, M) consiste de tubos estables de rango uno o dos, y que el álgebra Jacobiana no sólo es débilmente-simétrica sino que es simétrica. Más aún, mostramos que excluyendo sólo el caso de la esfera con 4 puntos marcados, estas álgebras son de crecimiento exponencial.

Es decir, toda triangulación \mathbb{T} de cualquier superficie cerrada (S, M) , excluyendo sólo el

caso de la esfera con 4 puntos marcados, determina un álgebra Jacobiana $\Lambda_{\mathbb{T}}$ que es simétrica, mansa, de crecimiento exponencial y con todos los módulos indescomponibles no proyectivos Ω -periódicos. Estos resultados muestran que la caracterización existente de álgebras simétricas, mansas y con los módulos indescomponibles no proyectivos Ω -periódicos, que se creía completa hasta el momento, no lo era. Esta familia de álgebras Jacobianas constituye una nueva familia de con estas propiedades.

Abstract

The finite dimensional Jacobian algebras are useful to construct triangulated categories which are 2-Calabi-Yau and Hom-finite with cluster-tilting objects. In this thesis we study two problems related to Jacobian algebras.

The first problem we consider is when a Jacobian algebra is finite dimensional. As first result we determine under which conditions a quiver with potential, with certain restriction on the quiver, give rise to a finite dimensional Jacobian algebra. Later we study the Jacobian algebras arising from closed Riemann surfaces with marked points. We show that the Jacobian algebras arising from a sphere with $n > 4$ marked points are finite dimensional algebras. This result gives a partial answer of a problem that was open for some years.

Recently, it was proven that the Jacobian algebras associated to closed Riemann surfaces with marked points are finite dimensional algebras, weakly-symmetric and tame.

As a second problem we study the stable module category of these Jacobian algebras. Denote by $\Lambda_{\mathbb{T}}$ the Jacobian algebra associated to a triangulation \mathbb{T} of a closed Riemann surface with marked points (S, M) . In the main result of this thesis, we show that the stable category of indecomposable modules of $\Lambda_{\mathbb{T}}$ consists of stable tubes of rank one or two, and hence, it is an algebra where the non-projective indecomposable modules are Ω -periodic, where Ω is the syzygy or Heller translation. As a consequence of this result, we prove that the generalized cluster category $\mathcal{C}_{(S, M)}$ of (S, M) consists of stable tubes of rank one or two, therefore the Jacobian algebras are symmetric. Moreover, we show that excluding only the case of a sphere with four marked points, these algebras are algebras of exponential growth.

Therefore, any triangulation \mathbb{T} of any closed Riemann surface (S, M) , excluding only the case of a sphere with four marked points, gives rise to a Jacobian algebra $\Lambda_{\mathbb{T}}$ which is symmetric, tame, with the non-projective indecomposable modules Ω -periodic, and an algebra of

exponential growth. These results show that the existing characterization of algebras which are symmetric, tame and with the non-projective indecomposable modules Ω -periodic, was not complete. This family of Jacobian algebras form a new family with these properties.

Introducción

En 2002, Fomin y Zelevinsky, en [FZ02], definieron las álgebras de conglomerado con la idea de crear una estructura algebraica para bases duales canónicas en grupos semisimples. Rápidamente esta teoría se relacionó con otras áreas de la matemática, como por ejemplo la geometría de Poisson, la teoría Teichmüller o la teoría de representaciones de álgebras asociativas, entre otras.

Una herramienta fundamental para definir las álgebras de conglomerado, es una transformación, llamada mutación, de matrices de intercambio, que son anti-simetrizables. En caso de restringirse a las matrices anti-simétricas enteras, esta operación se puede traducir a una transformación combinatoria de carcajes. Esta herramienta fue extendida por Derksen, Weymann y Zelevinsky en [DWZ08] a mutaciones de cierto tipo de álgebras de caminos llamadas álgebras Jacobianas.

En el proceso de categorificar álgebras de conglomerado se construyeron categorías con tres propiedades interesantes: categorías Hom-finitas, 2-Calabi-Yau (2-CY para abreviar) con objetos rígidos y maximales, llamados inclinantes de conglomerado. Dado un objeto inclinante de conglomerado T en una categorías \mathcal{C} que es Hom-finita y 2-CY, el álgebra de endomorfismos $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ recibe el nombre de álgebra 2-Calabi-Yau inclinada. En este tipo de categorías se define la idea de mutación de objetos inclinantes de conglomerado, introducido por Buan, Marsh, Reiten, Reineke y Todorov en [BMR⁺06].

Las álgebras 2-CY inclinadas y las álgebras Jacobianas tienen definiciones completamente diferentes, sin embargo, están muy relacionadas. Fue demostrado por Amiot, y Keller y Yang en [Ami09] y [KY11] que las álgebras Jacobianas de dimensión finita son álgebras 2-CY inclinadas y más aún, hay una fuerte relación entre la mutación de objetos inclinantes de conglomerado y la de álgebras Jacobianas.

En [FST08], Fomin, Shaphiro y Thruston introducen, bajo ciertas hipótesis, un álgebra de conglomerado para cada superficie orientada S con un conjunto finito M de puntos marcados. Más precisamente, cada triangulación \mathbb{T} de (S, M) de arcos etiquetados corresponden a un conglomerado, y la matriz de intercambio correspondiente se puede codificar como un carcaj $Q(\mathbb{T})$. Además, para cada triangulación \mathbb{T} , Labardini-Fragoso en [LF09], introduce un potencial $W(\mathbb{T})$ y muestra que este potencial es compatible con mutaciones de carcajes y potenciales. En este último artículo, el autor demuestra que el álgebra Jacobiana $\Lambda_{\mathbb{T}} = \mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ de una triangulación \mathbb{T} de una superficie con frontera no vacía (S, M) es de dimensión finita, y por tanto 2-CY inclinada. Denotaremos por $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))}$ a la categoría 2-CY y hom-finita tal que existe un objeto $T \in \mathcal{C}$ inclinante de conglomerado tal que $\Lambda_{\mathbb{T}} = \text{End}_{\mathcal{C}}^{\text{op}}(T)$. Se puede probar que la categoría \mathcal{C} es independiente de la triangulación \mathbb{T} , es decir, las categorías $\mathcal{C}_{(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))}$ y $\mathcal{C}_{(Q(\mathbb{T}'), W(\mathbb{T}'))}$ coinciden para cualesquiera triangulaciones \mathbb{T} y \mathbb{T}' de una superficie con puntos marcados (S, M) , y por tanto la denotaremos simplemente por $\mathcal{C}_{(S, M)}$. La categoría $\mathcal{C}_{(S, M)}$ es llamada la categoría de conglomerado de (S, M) . Existen varios trabajos que estudian de manera detallada dichas categorías, para superficies con frontera no vacía, ver por ejemplo [QZ, CCS06, Sch08, BZ11, MP14, ZZZ13].

Uno de los objetivos es estudiar cuándo un álgebra Jacobiana determinada por un carcaj con ciertas relaciones es de dimensión finita. Estos resultados se encuentran en el Capítulo 1. Nuestro objetivo principal consiste en estudiar álgebras Jacobianas asociada a superficies con puntos marcados. Los resultados se encuentran en los Capítulos 3 y 4.

En el primer capítulo introducimos al lector en la teoría básica de álgebras Jacobianas de un carcaj con potencial. En la última sección, para dar respuesta al primer objetivo, construimos el potencial para carcajes con ciertas hipótesis combinatorias, de tal manera que las álgebras Jacobianas asociadas sean de dimensión finita. Este resultado se encuentra en [TVD].

Como hemos mencionado anteriormente, el segundo problema que se aborda en esta tesis es estudiar álgebras Jacobianas de una superficie cerrada con puntos marcados. Para este fin, utilizamos la Teoría de categorías n -anguladas, que resulta ser una generalización de las categorías trianguladas. En el Capítulo 2, presentamos un breve resumen de dicha teoría, así como también estudiamos las categorías trianguladas, Hom-finitas, 2-Calabi-Yau con objetos inclinantes de conglomerado.

En el tercer capítulo, presentamos los resultados y conceptos básicos de los carcajes con potenciales asociados a cualquier superficie orientada con puntos marcados, otro objeto de interés para este trabajo. Como resultado principal del capítulo tres resolvemos parcialmente uno de los problemas abiertos por algunos años en el contexto de las álgebras Jacobianas de superficies, que consiste en saber cuándo son de dimensión finita. En esta tesis probamos que las álgebras Jacobianas provenientes de las esferas con $n > 4$ puntos marcados lo son, este resultado se encuentran en [TVD]. De manera independiente y simultánea, Ladkani en [Ladc], probó que cualquier álgebra Jacobiana de una superficie cerrada con puntos marcados es de dimensión finita.

Finalmente, en el Capítulo 4 presentamos los resultados principales de la tesis. Denotamos por $\Lambda_{\mathbb{T}} = \mathcal{P}(Q(\mathbb{T})W(\mathbb{T}))$ el álgebra Jacobiana de una triangulación \mathbb{T} de una superficie cerrada con puntos marcados (S, M) y por Ω el funtor sizigia de Heller de la categoría de $\Lambda_{\mathbb{T}}$ -módulos indescomponibles. En este capítulo mostramos que el trasladado de Auslander-Reiten es 2-periódico en objetos. Además, probamos que $\Lambda_{\mathbb{T}}$ es simétrica, por tanto, los módulos indescomponibles no proyectivos son Ω -periódicos. Como consecuencia de este hecho, se puede probar que la categoría de conglomerado generalizada $\mathcal{C}_{(S, M)}$ consiste en tubos estables de rango 1 o 2. Cabe destacar que las álgebras simétricas, mansas y con los módulos indescomponibles no proyectivos Ω -periódicos han sido muy estudiados principalmente por Skowrónski, Erdmann, Holm y Riedtmann.

Si bien es conocido que el tipo de representación de $\Lambda_{\mathbb{T}}$ es mansa, la prueba de éste hecho dada por Geiss, Labardini-Fragoso y Schröer en [GLFS] utiliza un argumento de degeneración de álgebras que no permite tener información sobre el tipo de crecimiento. Esta propiedad nos da información sobre la complejidad de la categoría de $\Lambda_{\mathbb{T}}$ -módulos indescomponibles, que en grado de complejidad creciente, es doméstica, polinomial y exponencial.

En éste último capítulo, mostramos que excluyendo sólo el caso de la esfera con 4 puntos marcados, estas álgebras son de crecimiento exponencial. Es decir, que el álgebra Jacobiana $\Lambda_{\mathbb{T}}$ es simétrica, mansa, Ω -periódica en la categoría de módulos indescomponibles no proyectivos sobre $\Lambda_{\mathbb{T}}$ y de crecimiento exponencial. De esto último podemos deducir, que $\Lambda_{\mathbb{T}}$ no pertenece a ninguna de las familias de álgebras simétrica, mansas y con los módulos indescomponibles no proyectivos Ω -periódicos conocidos hasta el momento:

- un álgebra zócalo equivalente a un álgebra simétrica de tipo Dynkin, pues este tipo de álgebras son de tipo de representación finita;
- un álgebra zócalo equivalente a un álgebra simétrica de tipo tubular, que en particular son de crecimiento polinomial;
- un álgebra de tipo cuaternio puro, de las cuales se sabe poseen a lo más tres módulos simples.

familias que formaban una caracterización que hasta el momento se creía completa (ver [ES08, Teorema 6.2]). Los resultados de este capítulo se encuentran en [VD].

Capítulo 1

Álgebras Jacobianas de carcajes con potenciales

En este capítulo, introduciremos uno de los principales objetos de estudio de este trabajo: las álgebras Jacobianas de un carcaj con un potencial. Además, en la última sección demostraremos el primer resultado de la tesis, que bajo ciertas hipótesis combinatorias sobre un carcaj Q cíclicamente orientado, es posible construir un álgebra Jacobiana Λ de dimensión finita.

En todo el trabajo k denotará un cuerpo algebraicamente cerrado.

1.1. Carcajes y álgebras de caminos

Si bien, en teoría de representaciones existe una definición estándar de álgebras de caminos, en este trabajo utilizaremos la dada por Derksen, Weymann y Zelevinsky en [DWZ08].

Definición 1.1.1. ■ Un *carcaj* Q es un cuádruplo $Q = (Q_0, Q_1, t, s)$ donde Q_0 es un conjunto finito de vértices, Q_1 es un conjunto finito de flechas y un par de funciones $t, s : Q_1 \rightarrow Q_0$ que determinan el comienzo con $s(\alpha)$ y el blanco o final con $t(\alpha)$, para toda flecha $\alpha \in Q_1$. Vamos a escribir $\alpha : i \rightarrow j$ para indicar $s(\alpha) = i$ y $t(\alpha) = j$.

■ ([BT13], Definition 3.1) Un *paseo de longitud* p en un carcaj Q es una $(2p + 1)$ -dupla

$$w = (x_0, \alpha_1, x_1, \alpha_2, \dots, x_{p-1}, \alpha_p, x_p)$$

tal que para toda i tenemos $x_i \in Q_0$, $\alpha \in Q_1$ y $\{s(\alpha_i), t(\alpha_i)\} = \{x_{p-1}, x_p\}$.

El paseo w es *orientado* si $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para todo i o $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i-1}) = x_{i-1}$ para todo i .

Mas aún, si $x_0 = x_p$, diremos que w es un *ciclo*. Llamaremos *lazo* a todo ciclo de longitud

1. Un paseo orientado es también llamado *camino*.

En algunas ocasiones omitiremos los vértices y abreviaremos w por $\alpha_1 \cdots \alpha_p$. Y en caso de necesitar una representación gráfica del paseo orientado escribiremos

$$(x_0 \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \xrightarrow{\alpha_2} x_2 \rightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_p} x_p).$$

- Para cada $i \in Q_0$, denotamos por e_i al camino formal de longitud cero.
- El *producto* de dos caminos $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ y $\beta_1 \cdots \beta_s$ es por definición la concatenación de caminos $\alpha_1 \cdots \alpha_r \beta_1 \cdots \beta_s$ si $t(\alpha_r) = s(\beta_1)$ y cero en otro caso.

Vamos a denotar por R el k -espacio vectorial de las funciones k -valuadas en Q_0 , y por Λ el k -espacio vectorial de las funciones k -valuadas en Q_1 , es decir, $R = k^{Q_0}$ y $\Lambda = k^{Q_1}$.

Para todo entero no negativo l denotemos por Λ^l el R -bimódulo

$$\Lambda^l = \Lambda \otimes_R^l \Lambda = \Lambda \otimes_R \Lambda \otimes_R \cdots \otimes_R \Lambda,$$

que como k -espacio vectorial está generado por los caminos de longitud l .

Por convención, en los casos $l = 0$ y 1 , usaremos la notación $R = \Lambda^0$ y $\Lambda = \Lambda^1$.

Definición 1.1.2. El *álgebra de caminos* de Q se define como la k -álgebra tensorial(graduada)

$$k\langle Q \rangle = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \Lambda^l. \quad (1.1)$$

Para cada $i, j \in Q_0$, la componente $k\langle Q \rangle_{i,j} = e_i k\langle Q \rangle e_j$ es llamada *espacio de caminos* de j a i .

El *álgebra de caminos completa* de Q está definida como

$$k\langle\langle Q \rangle\rangle = \prod_{l=0}^{\infty} \Lambda^l. \quad (1.2)$$

Es decir, los elementos de $k\langle\langle Q \rangle\rangle$ son combinaciones k -lineales (posiblemente infinitas) de elementos de la base de $k\langle Q \rangle$; y la multiplicación en $k\langle\langle Q \rangle\rangle$ es la extensión natural de la multiplicación en $k\langle Q \rangle$.

Derksen, Weymann y Zelevinsky denotan al álgebra de caminos por $R\langle Q \rangle$ y al álgebra de caminos completa por $R\langle\langle Q \rangle\rangle$.

Sea \mathfrak{m} el ideal bilátero del álgebra de caminos completa $k\langle\langle Q \rangle\rangle$ dado por

$$\mathfrak{m} = \prod_{l=1}^{\infty} \Lambda^l.$$

Entonces las potencias de \mathfrak{m} están dadas por

$$\mathfrak{m}^n = \prod_{l=n}^{\infty} \Lambda^l.$$

Se puede probar que \mathfrak{m} es un ideal maximal, y por tanto el álgebra $k\langle\langle Q \rangle\rangle$ es una k -álgebra topológica con la topología \mathfrak{m} -ádica, donde las potencias de \mathfrak{m} son un sistema básico de entornos abiertos del 0. Entonces, la clausura de cualquier subconjunto $U \subset k\langle\langle Q \rangle\rangle$ está dado por

$$\bar{U} = \bigcap_{n=0}^{\infty} (U + \mathfrak{m}^n).$$

La siguiente propiedad de la topología \mathfrak{m} -ádica es fundamental para este trabajo.

Proposición 1.1.3. *Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $k\langle\langle Q \rangle\rangle$ converge si y sólo si para cada $d \geq 0$, la sucesión $(x_n^{(d)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge cuando $n \rightarrow \infty$, en cuyo caso $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sum_{d \geq 0} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(d)}$, donde $x_n^{(d)}$ denota la componente de grado- d de x_n .*

Para ver con más detalles sobre la topología \mathfrak{m} -ádica se puede ver por ejemplo el libro de Greco y Salmon [GS71].

Ejemplo 1.1.4. Consideremos el carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, donde $Q_0 = \{1\}$, $Q_1 = \{\alpha\}$ y $s = t = \text{id}_{Q_1}$, es decir, el lazo que se muestra en la Figura 1.1.

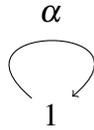


Figura 1.1: El carcaj lazo

Entonces $R = k^{Q_0} \cong k$ y $\Lambda = k^{Q_1} \cong k\alpha$. Mientras que el álgebra de caminos $k\langle Q \rangle$ es el álgebra de polinomios $k[\alpha]$, y el álgebra de caminos completa $k\langle\langle Q \rangle\rangle$ es el álgebra de series formales $k[[\alpha]]$.

1.2. Mutaciones de carcajes

En esta sección asumiremos que los carcajes no tienen lazos, es decir, que no existe $\alpha \in Q_1$ tal que $s(\alpha) = t(\alpha)$. Describiremos una operación combinatoria llamada mutación de carcaj, que fue introducida por Fomin y Zelevinsky en [FZ02].

Definición 1.2.1. Sea Q un carcaj. Un l -ciclo en Q es un ciclo c de longitud $l > 0$. Un carcaj es 2 -acíclico si no tiene 2 -ciclos.

La mutación definida en [FZ02, Definición 4.2] es una operación combinatoria en matrices semi-simetrizables. Sin embargo restringiremos la definición a matrices integrales semi-simétricas, debido a que se pueden codificar como carcajes sin lazos ni 2 -ciclos, y por tanto, la mutación resulta una operación definida en carcajes.

Dada una matriz integral semi-simétrica $B = (b_{i,j})$ de $n \times n$, el carcaj asociado $Q(B)$ es por definición un carcaj con n vértices $1, 2, \dots, n$ y $b_{i,j}$ flechas de j a i siempre que $b_{i,j} > 0$. Esta operación definida en carcajes está dada en tres pasos.

Definición 1.2.2 (Mutación de carcaj). Sean Q un carcaj 2 -acíclico e $i \in Q$ un vértice. La mutación $\mu_i(Q)$ en i se obtiene efectuando los siguientes pasos.

- (Paso 1) Por cada camino $\alpha\beta$ donde $\alpha : j \rightarrow i$ y $\beta : i \rightarrow k$ se añade una flecha $[\alpha\beta] : j \rightarrow k$;
- (Paso 2) se reemplaza cada flecha γ incidente en i por una flecha γ^* que vaya en el sentido opuesto;
- (Paso 3) se borran todos los 2 -ciclos.

El carcaj resultante $\mu_i(Q)$, se llama la *mutación de Q con respecto a i* .

Observe que en el Paso 1 se pudieron generar 2 -ciclos, pero gracias al Paso 3 se garantiza que el nuevo carcaj $\mu_i(Q)$ es nuevamente 2 -acíclico.

Ejemplo 1.2.3. En el siguiente ejemplo calcularemos la mutación de un carcaj Q realizando los tres pasos dados en la definición de mutación de un carcaj.

Sea Q el carcaj de la figura 1.2 y consideremos el vértice 2.

Los tres pasos de la la mutación $\mu_2(Q)$ se describen en la Figura 1.3.

Observar que la mutación $\mu_2\mu_2(Q)$ del ejemplo anterior es nuevamente el carcaj Q . Esta propiedad se cumple es general, es decir, la mutación es una *involución*.

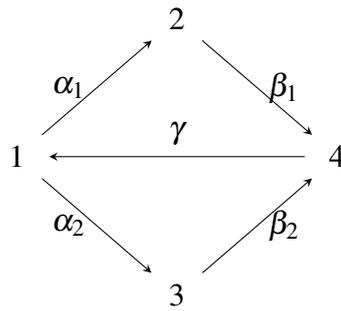


Figura 1.2: Carcaj Q

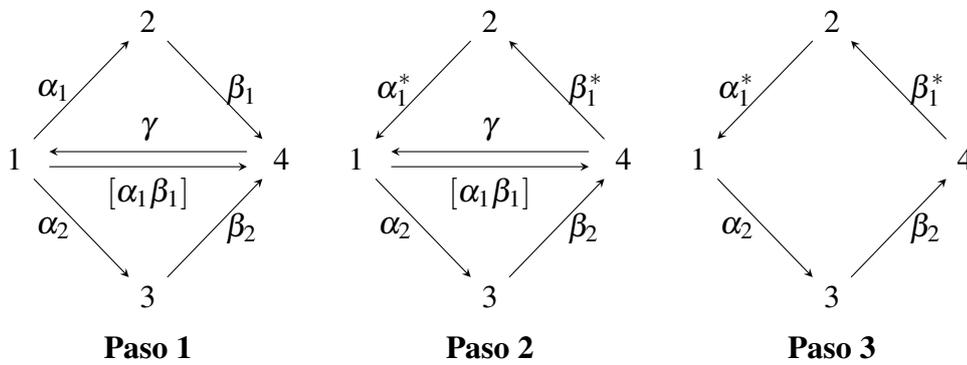


Figura 1.3: Mutación por pasos de un carcaj

1.3. Mutaciones de carcajes con potenciales

Los carcajes con potenciales aparecen en distintas áreas de la ciencia. Por ejemplo, en Física, en el contexto de dualidad de Seiberg en espejos simétricos, en donde los potenciales reciben el nombre de *superpotenciales* (véase [BD], [Bra03], [DM]).

En esta sección describiremos la relación de los carcajes con potenciales con la Teoría de Representaciones de Álgebras y Álgebras de Conglomerado. Para ello es necesario introducir la noción de mutaciones de carcajes con potenciales. Nos basaremos en el trabajo de Derksen, Weymann y Zelevinsky [DWZ08].

Definición 1.3.1. Sea Q un carcaj

- Para cada entero $d \geq 1$, definimos la *parte cíclica* de Λ^d como el R -sub-bimódulo generado por todos los ciclos de longitud d .
- Un elemento W de $k\langle\langle Q \rangle\rangle$ es llamado *potencial* si es una combinación posiblemente

infinita de ciclos en Q , es decir, es un elemento del subespacio vectorial

$$k\langle\langle Q \rangle\rangle_{\text{cyc}} = \prod_{d=1}^{\infty} \Lambda_{\text{cyc}}^d$$

- Dos potenciales S y S' son *cíclicamente equivalente* si $S - S'$ pertenece a la clausura topológica (con la topología m -ádica) del espacio generado por los elementos de la forma $a_1 \cdots a_d - a_2 \cdots a_d a_1$ donde $a_1 \cdots a_d$ es un ciclo.
- Para cada flecha $\alpha \in Q_1$ fija y cada ciclo $c = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_l$ en Q definimos la *derivada cíclica del ciclo c* como sigue:

$$\partial_{\alpha}(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_l) = \sum_{k=1}^l \delta_{\alpha, \alpha_k} \alpha_{k+1} \cdots \alpha_l \alpha_1 \cdots \alpha_{k-1}$$

donde $\delta_{\alpha, \alpha_k}$ es la delta de Kronecker, es decir,

$$\delta_{\alpha, \alpha_k} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \alpha_k \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

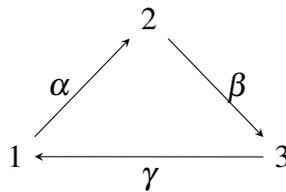
La *derivada cíclica* $\partial_{\alpha} : k\langle\langle Q \rangle\rangle_{\text{cyc}} \rightarrow k\langle\langle Q \rangle\rangle$ respecto a α es la extensión lineal y continua de tal manera que quede definida para todo potencial W . La definición general de derivada cíclica para álgebras no-conmutativas fue dada por Rota, Sagan y Stein en [RSS80].

De la definición de equivalencia cíclica, se sigue que un potencial W de $k\langle\langle Q \rangle\rangle$ no puede tener dos términos ρ_1 y ρ_2 con coeficientes no-cero tal que uno de ellos puede obtenerse del otro por una rotación. Al par (Q, W) le llamaremos *carcaj con potencial*.

Definición 1.3.2. Sea (Q, W) un carcaj con potencial. El *ideal Jacobiano* $J(W)$ es la cerradura topológica del ideal bilátero de $k\langle\langle Q \rangle\rangle$ generado por el conjunto $\{\partial_{\alpha}(W) \mid \alpha \in Q_1\}$, y el *álgebra Jacobiana* $\mathcal{P}(Q, W)$ es el cociente $k\langle\langle Q \rangle\rangle/J(W)$.

Ejemplo 1.3.3. Sean Q el carcaj de la Figura 1.4 y W el potencial $\alpha\beta\gamma$.

El álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q, W)$ es por definición el cociente $k\langle\langle Q \rangle\rangle/J(W)$, donde $J(W)$ está generado por las relaciones $\beta\gamma, \gamma\alpha$ y $\alpha\beta$. En este caso, se puede probar que $\mathcal{P}(Q, W)$ es isomorfa al álgebra de caminos $k\langle Q \rangle/I$, donde I es el ideal generado por las mismas relaciones $\beta\gamma, \gamma\alpha$ y $\alpha\beta$.

Figura 1.4: Carcaj Q

La mutación de carcaj con potencial está fuertemente relacionada con la definición que dimos en la sección anterior de mutación de un carcaj, que es puramente combinatoria. Sin embargo, esta nueva operación está ligada además a nociones algebraicas como suma directa de carcajes con potenciales y una idea de reducción de carcajes con potenciales que definiremos a continuación.

Definición 1.3.4. Sean (Q, W) y (Q', W') carcajes con potenciales sobre el mismo conjunto de vértices Q_0 .

- Los carcajes con potenciales (Q, W) y (Q', W') son *equivalentes a derecha* si existe un isomorfismo de álgebras $\phi : k\langle\langle Q \rangle\rangle \rightarrow k\langle\langle Q' \rangle\rangle$ tal que $\phi|_R = \text{id}$, y $\phi(W)$ es cíclicamente equivalente a W' .
- La *suma directa de carcajes con potenciales* $(Q, W) \oplus (Q', W')$ se define como el carcaj con potencial $(Q \oplus Q', W + W')$.
- Un carcaj con potencial (Q, W) es *trivial* si $W \in \Lambda^2$ y $\partial W = \Lambda$, o equivalentemente, $\mathcal{P}(Q, W) = R$.
- Denotemos por $W^{(n)} \in \Lambda^n$ la *componente homogénea* de orden n de un potencial W . Un carcaj con potencial (Q, W) es *reducido* si la componente homogénea W^2 de orden dos es cero, es decir, $W \in \mathfrak{m}^3$.
- Definimos la *expansión trivial de flechas* y *expansión reducida de flechas* de (Q, W) como el R -bimódulo de dimensión finita dado por

$$\Lambda_{\text{triv}} = \Lambda_{\text{triv}}(W) = \partial W^{(2)}, \quad \Lambda_{\text{red}} = \Lambda_{\text{red}}(W) = \Lambda / \partial W^{(2)}. \quad (1.3)$$

El siguiente resultado es de gran importancia para definir mutaciones en carcajes con potenciales.

Teorema 1.3.5. [DWZ08, Teorema 4.6] Para cada carcaj con potencial (Q, W) con la expansión trivial de flechas A_{triv} y la expansión reducida de flechas A_{red} , existen un carcaj con potencial trivial (Q_{triv}, W_{triv}) y un carcaj con potencial reducido (Q_{red}, W_{red}) tales que (Q, W) es equivalente a derecha a la suma directa $(Q_{triv}, W_{triv}) \oplus (Q_{red}, W_{red})$.

Definición 1.3.6. En el contexto del Teorema 1.3.5, los carcajes con potencial (Q_{triv}, W_{triv}) y (Q_{red}, W_{red}) son llamados, respectivamente, la *parte reducida* y la *parte trivial* de (Q, W) .

Definición 1.3.7 (Premutación de carcaj con potencial). Sean (Q, W) un carcaj con potencial e $i \in Q_0$ una flecha de Q . Denotemos por $\tilde{\mu}_i(Q)$ el carcaj que resulta de aplicar los dos primeros pasos de mutación de carcaj (ver Definición 4.5.2).

Denotaremos por $[W]$ el potencial en $k\langle\langle\tilde{\mu}_i(Q)\rangle\rangle$ obtenido de S al remplazar todos los caminos de Q longitud 2 $\alpha\beta$ tal que $t(\alpha) = i = s(\beta)$ por la flecha $[\alpha\beta]$ de $\tilde{\mu}_i(Q)$. Sea $\Delta_i(Q) = \sum \alpha^* \beta^* [\alpha\beta]$ el potencial en $k\langle\langle\tilde{\mu}_i(Q)\rangle\rangle$, que es la suma de todos los nuevos 3-ciclos, es decir, la suma corre por todos los caminos de longitud 2 $\alpha\beta$ de Q tal que $t(\alpha) = i = s(\beta)$.

La *pre-mutación del carcaj con potencial* (Q, W) en i es $\tilde{\mu}_i(Q, W) = (\tilde{\mu}_i(Q), \tilde{\mu}_i(W))$, donde $\tilde{\mu}_i(W) = [W] + \Delta_i(Q)$.

Observe que la definición de pre-mutación no garantiza que el carcaj subyacente $\tilde{\mu}_i(Q)$ sea 2-acíclico, ya que recordemos que en el Paso 1 de la mutación $\mu_i(Q)$ posiblemente obtengamos 2-ciclos y en el Paso 2 invertimos flechas, por tanto en $\tilde{\mu}_i(Q)$ no se ha realizado aún la eliminación de los 2-ciclos.

La siguiente definición fue dada por Derkens, Weyman y Zelevinsky en [DWZ08].

Definición 1.3.8 (Mutación de carcaj con potencial). Sea (Q, W) un carcaj con potencial e i un vértice de Q . Bajo las hipótesis y notación del Teorema 1.3.5, definimos la *mutación de un carcaj con potencial* (Q, W) con respecto a i como la parte reducida del carcaj con potencial $\tilde{\mu}_i(Q, W) = (\tilde{\mu}_i(Q), \tilde{\mu}_i(W))$, es decir, $\mu_i(Q, W) = ((\tilde{\mu}_i(Q))_{red}, (\tilde{\mu}_i(W))_{red})$.

En el Ejemplo 1.3.10 mostraremos que el carcaj subyacente de $\mu_i(Q, W)$ puede ser o no 2-acíclico. Ésta propiedad depende fuertemente del potencial W .

Definición 1.3.9. Sea $k_1, \dots, k_l \in Q_0$ una sucesión finita de vértices tales que $k_i \neq k_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, l-1$. Decimos que el carcaj con potencial (Q, W) es (k_1, \dots, k_l) -*no-degenerado*

si todos los carcajes con potenciales $(Q, W), \mu_{k_1}(Q, W), \mu_{k_2}\mu_{k_1}(Q, W), \dots, \mu_{k_l} \cdot \mu_{k_1}(Q, W)$ son 2-acíclicos (y por tanto bien definidos). Decimos que un carcaj con potencial (Q, W) es *no-degenerado* si es (k_1, \dots, k_l) -no-degenerado para cualquier sucesión de vértices.

Ejemplo 1.3.10. Consideremos el carcaj Q de la Figura 1.5 y dos potenciales $W_1 = \alpha\beta\gamma$ y $W_2 = 0$. Para diferenciar el carcaj con potencial (Q, W_1) con (Q, W_2) , denotaremos por (Q', W_2) al segundo carcaj con potencial, teniendo en cuenta que $Q = Q'$.

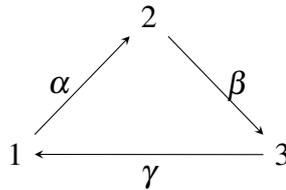


Figura 1.5: Carcaj Q

Consideremos las pre-mutación $\tilde{\mu}_2(Q, W_1)$ y $\tilde{\mu}_2(Q', W_2)$. Observemos que los carcajes $\tilde{\mu}_2(Q)$ y $\tilde{\mu}_2(Q')$ para ambas pre-mutaciones coinciden y es el carcaj de la Figura 1.6. En cuanto a los potenciales, tenemos que $\tilde{\mu}_2(W_1) = [\alpha\beta]\gamma + \beta^* \alpha^* [\alpha\beta]$, mientras que $\tilde{\mu}_2(W_2) = \beta^* \alpha^* [\alpha\beta]$.

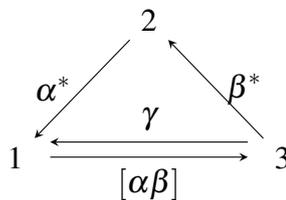


Figura 1.6: Carcaj de la pre-mutación $\tilde{\mu}_2(Q)$ y $\tilde{\mu}_2(Q')$

Por tanto, la mutación $\mu_2(Q, W_1)$ es el carcaj con potencial $(\mu_2(Q), \mu_2(W_1))$ donde $\mu_2(Q)$ es el carcaj de la Figura 1.7 y $\mu_2(W_1) = 0$. En este caso, el carcaj de la la mutación de (Q, W_1) es nuevamente 2-acíclico.

Mientras que la mutación $\mu_2(Q, W_2)$ coincide con la pre-mutación $\tilde{\mu}_2(Q', W_2)$ y en este caso el carcaj de $\mu_2(Q, W_2)$ tiene un 2-ciclo.

En el siguiente resultado, enumeramos algunas de las propiedades de mutaciones de carcajes con potenciales.

Teorema 1.3.11. *Supongamos que $k = \mathbb{C}$. Entonces*

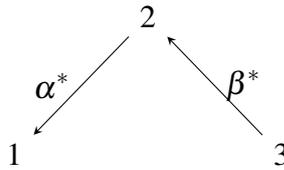


Figura 1.7: Carcaj de $\mu_2(Q, W_1)$

- (1) [DWZ08] Mutaciones de carcajes con potenciales están bien definidas salvo equivalencia a derecha.
- (2) [DWZ08, Teorema 5.7] Mutaciones de carcajes con potenciales son involuciones salvo equivalencia a derecha.
- (3) [DWZ08, Proposición 7.3] Todo carcaj 2-acíclico admite un potencial no-degenerado.
- (4) [DWZ08, Proposición 6.4] La propiedad de dimensión finita de álgebras Jacobianas es invariante bajo mutaciones de carcaj con potencial.
- (5) [GLFS, Teorema 1.1] Para cualquier potencial no-degenerado W en un carcaj Q 2-acíclico, el tipo de representación del álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q, W)$ es invariante bajo mutaciones de carcajes con potencial.
- (6) [GLFS, Prueba del Teorema 3.6] El crecimiento exponencial de un álgebra Jacobiana es invariante bajo mutaciones de carcaj con potencial.

Observación 1.3.12. Los enunciados (1), (2) y (4) del Teorema 1.3.11 se cumplen independientemente del cuerpo k , la parte (3) se cumple para cualquier cuerpo no numerable, mientras que las partes (5) y (6) están demostradas para el cuerpo \mathbb{C} .

1.4. Un potencial para carcajes cíclicamente orientados

Como hemos mencionado anteriormente, dado un carcaj con potencial (Q, W) y un vértice i de Q podemos construir un nuevo carcaj con potencial $\mu_i(Q, W)$, cuyo carcaj $(\tilde{\mu}_i(Q))_{\text{red}}$ puede ser 2-acíclico o no, y esta propiedad depende fuertemente del potencial W (ver Ejemplo 1.3.10).

Por otro lado, el potencial W determina, además, si el álgebra Jacobiana $\Lambda = \mathcal{P}(Q, W)$ es de dimensión finita, propiedad que en nuestro contexto resulta de gran importancia.

Por tanto, una pregunta natural es si dado un carcaj Q es posible determinar un potencial W de $k\langle\langle Q \rangle\rangle$ de tal manera que el álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q, W)$ sea de dimensión finita y el carcaj sea no-degenerado. En esta sección determinaremos, bajo ciertas hipótesis sobre el carcaj, un potencial que determina álgebras Jacobianas de dimensión finita. Este resultado se encuentra en [TVD].

Empezaremos recordando la definición de carcaj cíclicamente orientado.

Definición 1.4.1. Sea Q un carcaj.

- Un ciclo $c = (x_1, \alpha_1, \dots, x_p, \alpha_p, x_p)$ es llamado *no-intersectante* si los vértices x_1, \dots, x_p son distintos dos a dos.
- Si c es un ciclo no-intersectante entonces cualquier flecha $\beta \in Q \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ con $\{s(\beta), t(\beta)\} \subseteq \{x_1, \dots, x_p\}$ es llamada *cuerda* de c . Un ciclo c es llamado *sin-cuerdas* si es no-intersectante y no tiene cuerdas de c .
- Si Q no tiene lazos ni 2-ciclos se llama *cíclicamente orientado* si cada ciclo sin-cuerdas es orientado. Observar que esta característica implica que no existen flechas múltiples en Q . Un carcaj sin ciclos orientados es llamado *acíclico* y el álgebra de caminos sobre un carcaj acíclico es llamado *triangular*.
- Un camino $\gamma = (x_0 \xrightarrow{\gamma_1} x_1 \xrightarrow{\gamma_2} x_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{\gamma_L} x_L)$ es *minimal* si no existe flecha $x_i \rightarrow x_j$ en Q con $1 \leq i+1 < j \leq L$. Dados dos vértices x e y vamos a escribir $x \text{---} y$ para indicar que x y y están unidos por una arista en el grafo subyacente de Q . Un paseo $\gamma = (x_0 \text{---} x_1 \text{---} x_2 \text{---} \dots \text{---} x_L)$ es llamado *paseo minimal* si no existe flecha que una x_i con x_j con $1 \leq i+1 < j \leq L$ y $(i, j) \neq (0, L)$.
- Decimos que $\gamma = (x_0 \xrightarrow{\gamma_1} x_1 \xrightarrow{\gamma_2} x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_L)$ es un camino *anti-paralelo* a una flecha $\alpha : i \rightarrow j$ si $x_0 = j$ y $x_L = i$. Observe que si γ es un *camino anti-paralelo minimal* a α , entonces el sub-carcaj pleno generado por los vértices x_0, \dots, x_L forman un ciclo sin-cuerdas.

Antes de enunciar el resultado principal de esta Sección necesitamos definir el concepto de potencial primitivo de un carcaj Q y sucesión cíclica.

Definición 1.4.2. [DWZ08, Section 9] Sea Q un carcaj sin lazos ni 2-ciclos. Un potencial W de $k\langle\langle Q \rangle\rangle$ es *primitivo* si es cíclicamente equivalente a una combinación lineal de todos los ciclos sin-cuerda del carcaj Q .

Para aclarar la construcción de la siguiente definición véase el Ejemplo 1.4.4

Definición 1.4.3. Sean Q un carcaj cíclicamente orientado tal que toda flecha tenga a lo más dos caminos anti-paralelos minimales y $c = \beta_0\beta_1\beta_2 \dots \beta_l$ un ciclo orientado minimal. Consideremos el par (β_0, ρ) , donde ρ es el camino anti-paralelo $\beta_1 \dots \beta_l$ a la flecha β_0 en el ciclo c . De manera re-cursiva construiremos pares (α_k, ρ_k) para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde α_k es una flecha de Q y ρ_k es un camino anti-paralelo minimal a α_k , mediante los siguientes pasos:

Paso 0 Denotamos por α_0 a la flecha β_0 . Si existe un camino ρ_0 anti-paralelo minimal a α_0 y diferente a ρ , entonces el primer elemento de la sucesión es (α_0, ρ_0) . En caso contrario, la sucesión es constante al elemento (α_0, ρ) y el proceso termina en este paso.

Paso 1 Denotamos por α_1 la flecha del camino ρ_0 tal que $s(\alpha_0) = t(\alpha_1)$. Notemos que α_1 tiene un único camino anti-paralelo minimal ρ'_1 en el ciclo $\alpha_0\rho_0$. Como en el paso anterior, si existe un camino ρ_1 anti-paralelo minimal a α_1 y diferente a ρ'_1 , entonces el segundo elemento de la sucesión es (α_1, ρ_1) . En caso contrario, la sucesión es constante a partir del elemento encontrado en el paso anterior, es decir, el par (α_0, ρ_0) .

Paso 2 Denotamos por α_2 la flecha del camino ρ_1 tal que $t(\alpha_1) = s(\alpha_2)$. Sea ρ'_2 el único camino anti-paralelo minimal a α_2 en el ciclo $\alpha_1\rho_1$. Si existe un camino ρ_2 anti-paralelo minimal a α_2 y diferente a ρ'_2 , formando el par (α_2, ρ_2) . En caso contrario, la sucesión es constante a partir del elemento dos, es decir, el par (α_1, ρ_1) .

⋮

Paso k Denotamos por α_k la flecha del camino ρ_{k-1} tal que:

- si k es impar $s(\alpha_{k-1}) = t(\alpha_k)$;
- si k es par $t(\alpha_{k-1}) = s(\alpha_k)$.

Sea ρ'_k el único camino anti-paralelo minimal a α_k en el ciclo $\alpha_{k-1}\rho_{k-1}$. Si existe un camino ρ_k anti-paralelo minimal a α_k y diferente a ρ'_k , entonces formamos el par (α_k, ρ_k) , en caso contrario la sucesión es constante a partir del paso $k - 1$.

A la sucesión de pares ordenados $\{(\alpha_k, \rho_k)\}_{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ la llamaremos *sucesión cíclica* del ciclo c . En caso de que, en algún paso, la sucesión se vuelva constante, diremos que la sucesión cíclica es *finita*.

Notemos que las flechas α_k de la sucesión cíclica $\{(\alpha_k, \rho_k)\}_{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ de un ciclo c tienen la propiedad de que terminan o empiezan en $s(\alpha)$. Más precisamente, si k es par, entonces $t(\alpha_k) = t(\alpha)$; y si k es impar, entonces $h(\alpha_k) = t(\alpha)$. Además, dicha sucesión es única, ya que estamos asumiendo que hay a lo más dos caminos anti-paralelos minimales.

Ejemplo 1.4.4. En este ejemplo construiremos la sucesión cíclica para el ciclo $c = \alpha_0\alpha_3\gamma_3$ del carcaj Q de la Figura 1.8. Antes de construirla observe que el carcaj Q satisface que toda flecha tiene exactamente dos caminos anti-paralelos.

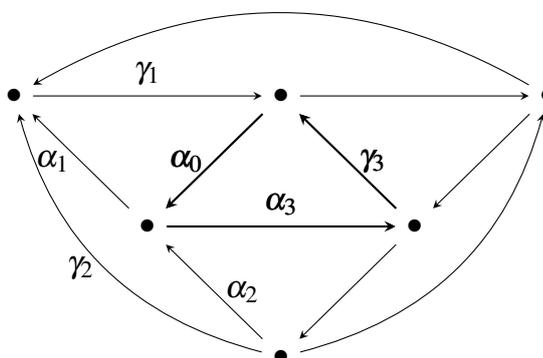


Figura 1.8: Carcaj con sucesión cíclica infinita

Paso 0 Dado el ciclo c la flecha que tenemos que considerar para el primer elemento de la sucesión es α_0 . Consideremos ρ_0 , el único camino anti-paralelo minimal diferente a $\alpha_3\gamma_3$, es decir, ρ_0 es el camino $\alpha_1\gamma_1$, por tanto el primer elemento de la sucesión es $(\alpha_0, \alpha_1\gamma_1)$.

Paso 1 Consideramos a α_1 , pues α_1 es la flecha de ρ_0 tal que $s(\alpha_1) = t(\alpha_0)$, observemos que el único camino anti-paralelo minimal diferente a $\gamma_1\alpha_0$ es $\gamma_2\alpha_2$, por tanto el segundo elemento de la sucesión es $(\alpha_1, \gamma_2\alpha_2)$.

Paso 2 Consideramos α_2 y el único camino anti-paralelo minimal diferente a $\alpha_1\gamma_2$ es $\alpha_3\gamma_4$, de donde el tercer par de la sucesión es $(\alpha_2, \alpha_3\gamma_4)$.

Paso 3 Ahora consideremos la flecha α_3 y el único camino anti-paralelo minimal diferente a $\gamma_4\alpha_2$ es $\gamma_3\alpha_0$, es decir, que el cuarto elemento es el par $(\alpha_3, \gamma_3\alpha_0)$.

Paso 4 Para construir el quinto elemento, consideremos α_0 y el único camino anti-paralelo minimal $\alpha_1\gamma_1$ diferente a $\alpha_3\gamma_3$, por tanto el quinto elemento es $(\alpha_0, \alpha_1\gamma_1)$.

Observemos que el quinto elemento de la sucesión $(\alpha_0, \alpha_1\gamma_1)$ coincide con el primer elemento de la sucesión, es decir, que por la construcción de la sucesión, tenemos que $(\alpha_k, \rho_k) = (\alpha_{k+4}, \rho_{k+4})$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

En este ejemplo consideramos el ciclo $c = \alpha_0\alpha_3\gamma_3$ y obtuvimos una sucesión cíclica periódica. Esta propiedad es independiente del ciclo c , es decir, la sucesión cíclica de cualquier ciclo minimal c del carcaj Q es una sucesión infinita, pero periódica y con periodo 4.

A partir de este momento siempre que nos refiramos a un camino γ anti-paralelo a una flecha α , en un carcaj Q , estaremos asumiendo que el camino es minimal.

Observe que el carcaj Q del ejemplo 1.4.4 es cíclicamente orientado, pero ello no implica que las sucesiones cíclicas sean finitas. Este carcaj resulta de interés en los capítulos posteriores.

Lema 1.4.5. *Sea Q un carcaj cíclicamente orientado tal que todo vértice $i \in Q_0$ tenga a lo más dos flechas que terminen en i . Entonces toda flecha α tiene a lo más dos caminos anti-paralelos.*

Para la demostración del Lema 1.4.5, basta observar que todo camino minimal anti-paralelo a una flecha $\alpha : i \rightarrow j$, termina en i , y por hipótesis hay a lo más dos flechas y por tanto a lo más dos caminos anti-paralelos minimales, ya que los caminos anti-paralelos minimales no comparten flechas.

A continuación enunciaremos el resultado principal de esta sección.

Teorema 1.4.6. *[TVD, Teorema 2] Sea Q un carcaj cíclicamente orientado y tal que todo vértice $i \in Q_0$ tenga a lo más dos flechas que terminen en i . Si toda sucesión cíclica, de cualquier ciclo orientado minimal, es finita, entonces el álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q, W)$, con W un potencial primitivo, es de dimensión finita.*

Demostración del Teorema 1.4.6. Primero probaremos que todo ciclo minimal orientado en el álgebra Jacobiana $\Lambda = \mathcal{P}(Q, W)$ es un camino cero. Sea $c = \beta_0\beta_1 \dots \beta_n$ un ciclo minimal orientado.

Por hipótesis, el ciclo c tiene una sucesión cíclica finita, consideremos l el mayor natural tal que los elementos $\{(\alpha_k, \rho_k)\}_{k=1}^l$ son diferentes entre sí. Es decir, que α_k tiene dos caminos anti-paralelos para todo $k = \{1, \dots, l-1\}$, uno de ellos es ρ_k y el otro lo denotaremos por ρ'_k y que es un camino del ciclo $\alpha_{k-1}\rho_{k-1}$. Mientras que α_l tiene sólo un camino anti-paralelo. Por tanto,

$$\partial_{\alpha_k}(W) = x_{c_k}\rho_k + x_{c_{k-1}}\rho'_k \quad (1.4)$$

donde $x_{c_{k,i}}$ y $x_{c_{k,2}}$ son los coeficientes de los ciclos $\alpha_k\rho_k$ y $\alpha_{k-1}\rho_{k-1}$ en el potencial W respectivamente, para todo $k = 1, \dots, l-1$, y en los caso de α_0 y α_l , tenemos:

$$\partial_{\alpha_0}(W) = x_c\beta_1 \dots \beta_n + x_{c_0}\rho_0 \quad (1.5)$$

donde x_c es el coeficiente del ciclo c en W y x_{c_0} es el coeficiente del ciclo $\rho_0\alpha_0$ en W y

$$\partial_{\alpha_l}(W) = x_{c_l}\rho_l \quad (1.6)$$

pues α_l tiene un único camino anti-paralelo y x_{c_l} es el coeficiente del ciclo $\alpha_l\rho_l$ en el potencial W .

Consideremos el ciclo $c = \beta_0\beta_1 \dots \beta_n$, por la construcción de los pares $\{(\alpha_k, \rho_k)\}_{k=1}^l$, tenemos que el ciclo c es igual a $\alpha_0\beta_1 \dots \beta_n$, pues $\alpha_0 = \beta_0$. Además, por la Ecuación 1.5, tenemos que $\beta_1 \dots \beta_n = -\frac{x_{c_0}}{x_c}\rho_0$, por tanto,

$$\begin{aligned} c &= \alpha_0\beta_1 \dots \beta_n \\ &= -\frac{x_{c_0}}{x_c}\alpha_0\rho_0 \\ &= -\frac{x_{c_0}}{x_c}\rho'_1\alpha_1 \end{aligned} \quad (1.7)$$

La última expresión de la Ecuación 1.7 se obtiene del hecho que α_1 es la única flecha de ρ_0 que tiene satisface $s(\alpha_0) = t(\alpha_1)$ y ρ'_1 es el único camino anti-paralelo a α_1 en el ciclo $\alpha_0\rho_0$ (ver paso 2 de la Definición 1.4.3). Realizando este proceso, para cada par (α_k, ρ_k) y reduciendo los escalares, tenemos

$$\begin{aligned}
c &= \left(-\frac{x_{c_0}}{x_c}\right) \left(-\frac{x_{c_1}}{x_{c_0}}\right) \rho_1 \alpha_1 = \frac{x_{c_1}}{x_c} \rho_1 \alpha_1 \\
&= \frac{x_{c_1}}{x_c} \alpha_2 \rho_2' \\
&= \left(\frac{x_{c_1}}{x_c}\right) \left(-\frac{x_{c_2}}{x_{c_1}}\right) \alpha_2 \rho_2 = -\frac{x_{c_2}}{x_c} \alpha_2 \rho_2 \\
&= -\frac{x_{c_2}}{x_c} \rho_3' \alpha_3 \\
&\vdots \\
&= \begin{cases} \frac{x_{c_{l-1}}}{x_c} \rho_{l-1} \alpha_{l-1} & \text{si } l-1 \text{ es impar} \\ -\frac{x_{c_{l-1}}}{x_c} \alpha_{l-1} \rho_{l-1} & \text{si } l-1 \text{ es par} \end{cases} \tag{1.8}
\end{aligned}$$

Puesto que α_l es la única flecha de ρ_{l-1} que empieza o termina en $s(\alpha_0)$ y ρ_l' es el camino anti-paralelo a α_l en el ciclo $\rho_{l-1} \alpha_{l-1}$, la expresión 1.8 se puede reescribir de la siguiente manera:

$$c = \begin{cases} \frac{x_{c_{l-1}}}{x_c} \alpha_l \rho_l' & \text{si } l-1 \text{ es impar} \\ -\frac{x_{c_{l-1}}}{x_c} \rho_l' \alpha_l & \text{si } l-1 \text{ es par} \end{cases} \tag{1.9}$$

Como α_l tiene un único camino anti-paralelo, tenemos

$$c = \begin{cases} \frac{x_{c_{l-1}}}{x_c} \alpha_l \rho_l & \text{si } l-1 \text{ es impar} \\ -\frac{x_{c_{l-1}}}{x_c} \rho_l \alpha_l & \text{si } l-1 \text{ es par} \end{cases} \tag{1.10}$$

Y la relación 1.6, implica que c es un ciclo cero en Λ .

Ahora, probaremos que cualquier ciclo es cero en Λ . Sea c un ciclo no minimal en Q . Para fijar notación

$$c = (x_1 \xrightarrow{\alpha_1} x_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots x_n \xrightarrow{\alpha_n} x_1).$$

Si existe un camino $\gamma = \alpha_k \dots \alpha_{k'}$ de c tal que γ es un ciclo mínimo, entonces el ciclo c ya es un ciclo cero en Λ . Supongamos que ningún camino $\alpha_k \dots \alpha_{k'}$ con $k < k'$ es un ciclo mínimo.

Puesto que c es un ciclo no minimal, entonces existe una cuerda $\beta_1 : x_i \rightarrow x_j$ con vértices en c tal que $c_1 = \beta_1 \alpha_j \dots \alpha_i$ es un ciclo orientado mínimo. Consideremos j como el menor natural del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que c_1 es un ciclo orientado mínimo. Denotemos por $i_0 = j$ y $i_1 = i$.

Ahora, consideremos el paseo \tilde{c}_1 que se obtiene de sustituir el camino $\alpha_{i_0} \dots \alpha_{i_1}$ por β_1 en el ciclo c , es decir,

$$\tilde{c}_1 = (x_1 \xrightarrow{\alpha_1} x_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{i_0-1}} x_{i_0} \xleftarrow{\beta_1} x_{i_1} \xrightarrow{\alpha_{i_1}} \dots x_n \xrightarrow{\alpha_n} x_1).$$

Puesto que \tilde{c}_1 no es orientado no puede ser minimal, ya que el carcaj es cíclicamente orientado, por tanto existe una cuerda $\beta_2 : x_{i_3} \rightarrow x_{i_2}$ tal que $c_2 = \beta_2 \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_3}$ es un ciclo mínimo orientado y el número i_3 es el menor número natural en el conjunto $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_0, \dots, i_1 - 1\}$ con esta propiedad y que el camino γ_1 que empieza en $t(\beta_1)$ y termina en $h(\beta_2)$, que es:

$$(x_{i_1} \xrightarrow{\alpha_{i_1}} \dots \xrightarrow{\alpha_{i_2-1}} x_{i_2})$$

no tiene cuerdas.

Observe que nuevamente el paseo \tilde{c}_2 que se obtiene de sustituir el camino $\alpha_{i_0} \dots \alpha_{i_1}$ por la flecha β_2 el paseo \tilde{c}_1 , es decir,

$$\tilde{c}_2 = (x_1 \xrightarrow{\alpha_1} x_2 \dots \xrightarrow{\alpha_{i_0-1}} x_{i_0} \xleftarrow{\beta_1} x_{i_1} \xrightarrow{\alpha_{i_1}} \dots \xrightarrow{\alpha_{i_2-1}} x_{i_2} \xleftarrow{\beta_2} x_{i_3} \xrightarrow{\alpha_{i_3}} \dots x_n \xrightarrow{\alpha_n} x_1)$$

tampoco es no orientado y por tanto no minimal, es decir, existe una cuerda $\beta_3 : x_{i_5} \rightarrow x_{i_4}$, con las propiedades análogas a la flecha β_2 .

El proceso de elegir una flecha β_i con vértices en el paseo \tilde{c}_{i-1} se puede repetir sólo un número finito de veces, pues β_i tiene vértices en un conjunto cada vez más pequeño en cada elección.

Al finalizar la elección de los β_i , observemos que por la minimalidad de los números i_j en cada paso, necesariamente la longitud de cada camino γ_i que empiezan en $s(\beta_i)$ y termina en $t(\beta_{i+1})$ tiene que ser cero. Es decir, $s(\beta_i) = t(\beta_{i+1})$ módulo la cantidad de flechas β_i , formando de esta manera un ciclo minimal orientado $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r$, donde r es el número de cuerdas del ciclo seleccionadas.

Por construcción de β_1 , tenemos que $h(\alpha_n)$ es un vértice x_k con k en el conjunto ordenado $\{i_1, i_1 + 1, \dots, n - 1\}$. Por tanto $s(\beta_2)$ es un vértices x'_k con k en el mismo conjunto $\{i_1, i_1 + 1, \dots, n - 1\}$.

Consideremos el camino

$$\alpha_{i_0} \dots \alpha_{i_1} \alpha_{i_1+1} \dots \alpha_{s(\beta_2)}.$$

Hemos descartado la opción de que $\alpha_{i_0} \dots \alpha_{i_1} \alpha_{i_1+1}$ sea un ciclo mínimo, pues en caso contrario el ciclo c ya es cero, pero la flecha β_2 tiene sólo dos caminos anti-paralelos, uno de ellos es $\alpha_{i_1+1} \dots \alpha_{s(\beta_2)}$ y el otro es un camino denotaremos que por ρ' . Como W es un potencial primitivo entonces

$$\partial_{\beta_2}(W) = x_c \alpha_{i_1+1} \dots \alpha_{s(\beta_2)} + x'_c \rho'$$

para algún par de escalares x_c y x'_c . Por tanto, el ciclo c se puede reescribir como

$$-\frac{x'_c}{x_c} \alpha_1 \dots \alpha_{i_0} \dots \alpha_{i_1} \rho' \alpha_{s(\beta_2)+1} \dots \alpha_n. \quad (1.11)$$

Por hipótesis, del vértice x_{i_1} salen a lo más dos flechas, una de ellas es β_1 y la otra es α_{i_1+1} , por tanto el camino ρ' empieza con la flecha β_1 , por tanto el ciclo c de la Ecuación 1.11 tiene el ciclo mínimo $\alpha_{i_0} \dots \alpha_{i_1} \beta_1$ que es cero en Λ , por tanto el camino c es cero. \square

Capítulo 2

Carcaj de Auslander-Reiten, categorías de conglomerado y n-anguladas

Este capítulo damos definiciones y resultados, existentes en la literatura, que son relevantes para esta tesis, los temas a tratar son: carcaj de Auslander-Reiten, categorías de conglomerado y categorías n -anguladas. Éstas últimas son una generalización de las categorías trianguladas y están fuertemente relacionadas con las categorías de conglomerado.

2.1. Carcaj de Auslander-Reiten

En esta sección presentaremos algunos conceptos básicos sobre la Teoría de Auslander-Reiten, relacionada con el carcaj de Auslander-Reiten. Esta teoría está definida para álgebras mucho más generales que las k -álgebras sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado.

Empezaremos definiendo cierto tipo de sucesiones exactas cortas de módulos que son importantes para construir el carcaj de Auslaner-Reiten.

Definición 2.1.1. Sean $f : B \rightarrow C$ y $g : A \rightarrow B$ homomorfismos de Λ -módulos.

- Decimos que f es un *epimorfismo que se escinde* o *se parte* si existe $h : C \rightarrow B$ tal que $f \circ h = \mathbf{1}_C$, es decir, el morfismos $\mathbf{1}_C : C \rightarrow C$ se factoriza por f .

- Decimos que g es un *monomorfismo que se escinde* o *que se parte* si el morfismo $\mathbf{1}_A$ se factoriza por g .
- Decimos que f es un *morfismo que casi se parte a derecha* si:
 - (a) f no es un epimorfismo que se escinde;
 - (b) todo morfismo $h : X \rightarrow C$ que no es un epimorfismo que se escinde se factoriza por f .
- Decimos que g es un *morfismo que casi se parte a izquierda* si:
 - (a) f no es un monomorfismo que se escinde;
 - (b) todo morfismo $h : A \rightarrow X$ que no es un monomorfismo que se escinde se factoriza por f .

Ejemplo 2.1.2. Hay dos ejemplos canónicos de morfismos que casi se parten a izquierda y a derecha. Uno de ellos relacionado a módulos indescomponibles inyectivos y el otro a módulos indescomponibles proyectivos. Sea I un módulo indescomponible inyectivo. Entonces el epimorfismo $I \rightarrow I/\text{soc}I$ es un morfismo que casi se parte a izquierda. De manera dual, dado un módulo indescomponible proyectivo, el monomorfismo $\text{rad}(P) \rightarrow P$ es un monomorfismo que casi se parte a derecha.

Definición 2.1.3. Sean $f : B \rightarrow C$ y $g : A \rightarrow B$ morfismo de Λ -módulos.

- Un morfismo f es *minimal a izquierda* si para todo morfismo $h : C \rightarrow C$ tal que $h \circ f = f$, se cumple que h es un isomorfismo.
- Un morfismo g es *minimal a derecha* si para todo morfismo $h : B \rightarrow B$ tal que $f \circ h = f$, se cumple que h es un isomorfismo.
- Un morfismo f es *minimal a derecha que casi se parte* si es:
 - (a) un morfismo que casi se parte a derecha y,
 - (b) un morfismo minimal a derecha.
- Un morfismo g es *minimal a derecha que casi se parte a izquierda* si es:

- (a) un morfismo que casi se parte a izquierda y,
- (b) un morfismo minimal a izquierda.

En esta sección estamos interesados en aquellas sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

tales que f es un morfismo que casi se parte a izquierda y g es un morfismo que casi se parte a derecha. Este tipo de sucesiones se le llama *sucesiones que casi se parten* o *sucesiones de Auslander-Reiten* y están relacionadas con un funtor que construiremos a continuación.

Consideremos M un Λ -módulo y

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

una presentación proyectiva minimal de M , donde $p_0 : P_0 \longrightarrow M$ y $p_1 : P_1 \longrightarrow \ker p_0$ son cubiertas proyectivas. Aplicando el funtor dual $(-)^* = \text{Hom}_{\Lambda}(-, \Lambda)$ (exacto a izquierda y contravariante), obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{p_0^*} P_0^* \xrightarrow{p_1^*} P_1^* \longrightarrow \text{Coker } P_1^* \longrightarrow 0.$$

Denotemos por $\text{Tr}M$ al $\text{Coker } p_1^*$ y lo llamamos el *transpuesto* de M .

Para poder definir el *funtor transpuesto* es necesario considerar la *categoría estable por proyectivos* que por definición es la categoría cociente

$$\underline{\text{mód}} \Lambda = \text{mód } \Lambda / \mathcal{P}.$$

Recordemos que los objetos de la categoría estable $\underline{\text{mód}} \Lambda$ son los mismos que los objetos de la categoría de módulos $\text{mód } \Lambda$, mientras que dados M, N módulos, el k -espacio vectorial $\underline{\text{Hom}}_{\Lambda}(M, N)$ de morfismos de M en N está definido como el espacio vectorial cociente

$$\underline{\text{Hom}}_{\Lambda}(M, N) = \text{Hom}_{\Lambda}(M, N) / \mathcal{P}(M, N).$$

Proposición 2.1.4. [ASS06, Capítulo IV, Proposición 2.2] *La correspondencia $M \longmapsto \text{Tr}M$ induce un funtor dual k -lineal*

$$\text{Tr} : \underline{\text{mód}} \Lambda \longrightarrow \underline{\text{mód}} \Lambda^{op}.$$

A continuación enunciamos un resultado sobre las sucesiones que casi se parten.

Proposición 2.1.5. [ARO97, Capítulo V Proposición 1.14] Sea $D = \text{Hom}_k(-, k)$ el funtor dual estándar. Los siguientes enunciados son equivalentes para una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

- (a) La sucesión es una sucesión que casi se parte.
- (b) El morfismo g es minimal que casi se parte a derecha.
- (c) El morfismo f es minimal que casi se parte a izquierda.
- (d) El módulo A es indescomponible y g casi se parte a derecha.
- (e) El módulo C es indescomponible y f casi se parte a izquierda.
- (f) El módulo C es isomorfo a $\text{Tr}DA$ y f casi se parte a izquierda.
- (g) El módulo A es isomorfo a $D\text{Tr}C$ y f casi se parte a derecha.

Definición 2.1.6. Los funtores trasladados de Auslander-Reiten son las composición de los funtores D y Tr , es decir,

$$\tau = D\text{Tr} \quad \text{y} \quad \tau^{-1}\text{Tr}D.$$

La existencia de sucesiones que casi se parten fue observado por primera vez en 1971 por Auslander en [Aus71], para álgebras de tipo de representación finita, es decir, álgebras con una cantidad finita de módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos. El resultado general se enuncia a continuación.

Teorema 2.1.7. [ARO97, Capítulo V Teorema 1.15]

- (a) Si C es un módulo indescomponible no-proyectivo, entonces existe una sucesión que casi se parte $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$.
- (b) Si Λ es un módulo indescomponible no-inyectivo, entonces existe una sucesión que casi se parte $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$.

Ejemplo 2.1.8. En este ejemplo mostraremos tres sucesiones que casi se parten.

- (a) Sea P un módulo indescomponible proyectivo no simple tal que $\text{rad } P$ es simple. Entonces, la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{rad } P \xrightarrow{i} P \longrightarrow \text{Coker } i \longrightarrow 0$$

es una sucesión que casi se parte.

- (b) Dualmente, si I es un módulo indescomponible inyectivo no simple tal que $I/\text{soc } I$ es simple, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \ker p \longrightarrow I \xrightarrow{p} I/\text{soc } I \longrightarrow 0$$

es una sucesión que casi se parte.

- (c) Dado un P módulo indescomponible proyectivo-inyectivo no simple. La sucesión

$$0 \longrightarrow \text{rad } P \longrightarrow \text{rad } P/\text{soc } P \oplus P \longrightarrow P/\text{soc } P \longrightarrow 0$$

es una sucesión que casi se parte.

Las sucesiones que casi se parten están relacionadas con cierto tipo de morfismo llamados *irreducibles*, definidos a continuación.

Definición 2.1.9. Sea $g : B \longrightarrow C$ un morfismo de Λ -módulos. Decimos que g es *irreducible* si

- g no es un monomorfismo ni epimorfismo que se escinde o se parte;
- si $g = t \circ s$ para algún $s : B \longrightarrow X$ y $t : X \longrightarrow C$, entonces s es un monomorfismo que se escinde o se parte o t es un epimorfismo que se escinde o se parte

Ahora daremos la relación entre morfismos irreducibles y morfismos que casi se parten a izquierda y derecha.

Teorema 2.1.10. [ARO97, Capítulo V, Teorema 5.3]

- (a) Sea C un módulo indescomponible. Entonces un morfismo $g : B \longrightarrow C$ es irreducible si y sólo si existe un morfismo $g' : B' \longrightarrow C$ tal que el morfismo inducido $\begin{pmatrix} g & g' \end{pmatrix} : B \oplus B' \longrightarrow C$ es un morfismo minimal a derecha que casi se parte.

(b) Sea A un módulo indescomponibles. Entonces $g : A \longrightarrow B$ es irreducible si y sólo si existe un morfismo $g' : A \longrightarrow B'$ tal que el morfismo inducido $\begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} : A \longrightarrow B \oplus B'$ es un morfismo minimal a izquierda que casi se parte.

Una importante consecuencia del Teorema 2.1.10 es que podemos obtener información de los morfismos minimales a izquierda que casi se parten conociendo los morfismos minimales a derecha que casi se parten y viceversa. Además, nos permite estudiar la estructura de sucesiones que casi se parten.

Ahora podemos definir el Carcaj de Auslander-Reiten.

Definición 2.1.11. Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita. Denotemos por $\text{ind } \Lambda$ a la clase de Λ -módulos indescomponibles no isomorfos dos a dos.

Sea Γ_Λ el carcaj, posiblemente infinito, con vértices y flechas definidos como sigue:

- el conjunto de vértices $(\Gamma_\Lambda)_0$ está en biyección con los Λ -módulos de $\text{ind } \Lambda$; cada vértice es denotado por $[M]$,
- existe una flecha de $[M]$ en $[N]$ si y sólo si existe un morfismo irreducible $M \longrightarrow N$. La flecha tiene valuación (a, b) , con a y b naturales, si existe
 - (a) un morfismo minimal que casi se parte a derecha $\bigoplus_{i=1}^a M_i \oplus X \longrightarrow N$, donde $M_i = M$ y M no es un sumando directo de X ,
 - (b) un existe un morfismo minimal que casi se parte a izquierda $M \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^b N_i \oplus Y$, donde $N_i = N$ y N no es un sumando directo de Y .

Los vértices que corresponden a módulos proyectivos son llamados *vértices proyectivos* y aquellos que corresponden a módulos inyectivos son llamados *vértices inyectivos*.

El carcaj valuado Γ_Λ junto con el trasladado de Auslander-Reiten τ es llamado el *carcaj de Auslander-Reiten* de Λ .

Para el siguiente ejemplo asumiremos cierto conocimiento sobre la técnica para calcular los módulos proyectivos e inyectivos sobre k -álgebras de caminos, así como también los radicales y zócalos de módulos (ver [ASS06]).

Ejemplo 2.1.12. Consideremos Q el carcaj $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$. La k -álgebra de caminos tiene los siguientes módulos indescomponibles proyectivos e inyectivos:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = I_3 \quad P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} = S_3 \quad I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = S_1 \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Para construir el carcaj de Auslander-Reiten es necesario construir los morfismos irreducibles entre los módulos indescomponibles, morfismos que están relacionados con los morfismos minimales que casi se parten. Sabemos que para los módulos indescomponibles inyectivos y proyectivos es posible construir este tipo de morfismos (ver Ejemplo 2.1.2 y 2.1.8), para ello necesitamos calcular los radicales de los módulos no simples proyectivos y los cocientes $I/\text{Soc}(I)$ de los módulos no simples inyectivos que, en este caso, son:

$$\text{rad } P_1 = P_2 \quad \text{rad } P_2 = P_3 \quad I_3/\text{Soc}(I_3) = I_2 \quad I_2/\text{Soc}(I_2) = I_1 = S_1. \quad (2.1)$$

Observemos que P_1 es un módulo proyectivo-inyectivo, P_2 es un módulo proyectivo no simple y I_2 es un módulo inyectivo no simple, por tanto, por el Ejemplo 2.1.8 tenemos tres sucesiones que casi se parten, asociadas a estos módulos:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{rad } P_2 \xrightarrow{i} P_2 \longrightarrow \text{Coker } i = S_2 \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \text{ker } p = S_2 \longrightarrow I_2 \xrightarrow{p} I_2/\text{soc } I_2 \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \text{rad } P_1 \longrightarrow \text{rad } P_1/\text{soc } P_1 \oplus P_1 \longrightarrow P_1/\text{soc } P_1 \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Relacionando estas tres sucesiones y los cálculos realizados en 2.1, tenemos que el carcaj de Auslander-Reiten es el de la Figura 2.1.

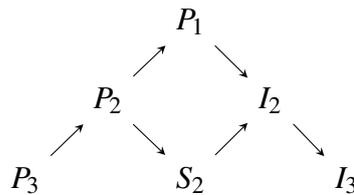


Figura 2.1: Carcaj de Auslander-Reiten del álgebra $k\langle Q \rangle$

Para finalizar definiremos el concepto de tubos en un carcaj, para ello es necesario definir el concepto de *carcaj de traslación*.

Definición 2.1.13. [Rin84]

- Un *carcaj de traslación* Γ es un 3-dupla $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \tau)$ donde
 - (a) (Γ_0, Γ_1) es un carcaj posiblemente infinito, pero localmente finito;
 - (b) y τ es un morfismo inyectivo $\tau = \tau_\Gamma : \Gamma'_0 \longrightarrow \Gamma_0$ definida en un subconjunto $\Gamma'_0 \subset \Gamma_0$ tal que para todo $z \in \Gamma'_0$ y cualquier $y \in \Gamma_0$ el número de flechas de y a z es igual a número de flechas de τz a y .

Los vértices que no pertenecen a Γ'_0 son llamados proyectivos y aquellos que no pertenecen a la imagen de τ son llamados inyectivos.

- Un vértice x de Γ es *periódico* si existe un $n \geq 1$ tal que $\tau^n x = x$.
- Un carcaj de traslación es *estable* si no contiene vértices proyectivos ni inyectivos.
- Sea \mathbb{A}_∞ el carcaj infinito

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \dots \longrightarrow n \longrightarrow n+1 \longrightarrow \dots$$

El carcaj de traslación $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ tiene como vértices al conjunto $(\mathbb{Z}, \mathbb{A}_\infty)$, para cada flecha $\alpha : a \longrightarrow b$ en \mathbb{A}_∞ , existen dos flechas $(z, \alpha) : (z, a) \longrightarrow (z, b)$ y $(z, \alpha)' : (z, b) \longrightarrow (z+1, \alpha)$ y definimos $\tau(z, a) = (z-1, a)$ para todo vértice a de \mathbb{A}_∞ .

- Un carcaj de traslación Γ es un *tubo estable* si Γ es de forma $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty/n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, donde $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty/n$ es el carcaj de traslación que se obtiene de $\mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ identificando los vértices $x \in \mathbb{Z}\mathbb{A}_\infty$ con $\tau^n x$ y cualquier flecha $x \longrightarrow y$ con la flecha $\tau^n x \longrightarrow \tau^n y$. Decimos que el número n es el *rango* de Γ .

Observemos que un carcaj de Auslander-Reiten Γ es por definición un carcaj de traslación $(\Gamma_0, \Gamma_1, \tau_\Gamma)$ valuado, donde el conjunto de vértices Γ_0 está en biyección con los módulos indescomponibles, las flechas de Γ_1 corresponden a morfismos irreducibles y la función τ_Γ es el trasladado de Auslander-Reiten.

2.2. Categorías generalizadas de conglomerado

Un álgebra de conglomerado es una subálgebra conmutativa de un cuerpo de funciones racionales, dado por generadores. Sin embargo, en lugar de dar una lista infinita de generadores se define un conjunto finito de ellos, junto con un método iterativo para producir nuevos generadores a partir de los viejos. Este método es un proceso combinatorio llamado *mutación* que depende de una matriz anti-simetrizable. En caso que dicha matriz sea anti-simétrica y entera, el proceso de mutación tiene una interpretación combinatoria de carcajes que coincide con la mutación de carcajes definida en el Capítulo 1.

En esta sección trabajaremos con categorías que nacieron por la idea de categorificar álgebras de conglomerado. Empezaremos por recordar algunas definiciones.

Definición 2.2.1. Sea \mathcal{C} una categoría triangulada y Σ el funtor suspensión de \mathcal{C} .

- Un funtor aditivo $\mathbb{S} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ es un *functor de Serre* si \mathbb{S} es una auto-equivalencia de \mathcal{C} y hay un isomorfismo natural

$$D\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \mathbb{S}X)$$

para cada $X, Y \in \mathcal{C}$.

- La categoría \mathcal{C} es *n-Calabi-Yau* si

$$D\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \Sigma^n X)$$

donde D es el funtor dual $\text{Hom}_k(, k)$, es decir, que la categoría \mathcal{C} tiene un funtor de Serre \mathbb{S} equivalente a Σ^n .

- Decimos que la categoría \mathcal{C} es *Hom-finita* si el k -espacio vectorial $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es de dimensión finita para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.
- Sea T un objeto en la categoría \mathcal{C} . Decimos que T es un objeto *rígido* si $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^1(T, T) = 0$.
- Un objeto T es *rígido maximal* si T es rígido y dado cualquier objeto rígido $N \in \mathcal{C}$ tal que $T \in \text{add } N$ satisface que $N \in \text{add } T$.

Supongamos que \mathcal{C} es una categoría Hom-finita.

- Un objeto $T \in \mathcal{C}$ es llamado *inclinante de conglomerado* o *2-inclinante de conglomerado* si

$$\text{add } T = \{X \in \mathcal{C} \mid \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T[1]) = 0\} = \{X \in \mathcal{C} \mid \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X[1]) = 0\}$$

Más aún, supongamos que \mathcal{C} es 2-Calabi-Yau.

- El álgebra de endomorfismo $\Lambda = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ para un objeto inclinante de conglomerado T de \mathcal{C} es llamada *álgebra 2-Calabi-Yau inclinada*.

Observe que un objeto inclinante de conglomerado es un objeto rígido maximal, pero el recíproco no es cierto. Burban, Iyama, Keller y Reiten en [BIKR08] muestran varias categorías donde hay objetos rígidos maximales que no son objetos inclinantes de conglomerado.

En este trabajo estamos interesados en aquellas categorías trianguladas, Hom-finitas que poseen objetos inclinantes de conglomerado, pues en este tipo de categorías es posible construir de forma recursiva objetos inclinantes de conglomerado a partir de uno dado. Este proceso recursivo es llamado llamada *mutación de Iyama-Yoshino* y se encuentra descrito en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Sea \mathcal{C} una categoría triangulada Hom-finita, 2-Calabi-Yau con un objeto inclinante de conglomerado T . Sea T_i un sumando directo indescomponible de $T \cong T_i \oplus T_0$. Entonces existe un único objeto indescomponible T_i^* no-isomorfo a T_i tal que $T_0 \oplus T_i^*$ es un objeto inclinante de conglomerado. Más aún, T_i y T_i^* están relacionados por la existencia de triángulos*

$$T_i \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} T_i^* \xrightarrow{w} T_i[1] \quad \text{y} \quad T_i^* \xrightarrow{u'} B' \xrightarrow{v'} T_i \xrightarrow{w'} T_i^*[1]$$

donde u y u' son $\text{add}(T_0)$ -aproximación minimal a izquierda y v y v' son $\text{add}(T_0)$ -aproximación minimal a derecha.

Observación 2.2.3. La mutación de objetos inclinantes de conglomerado fue descrita por primera vez por Buan, Marsh, Reineke, Reiten y Todorov en categorías de conglomerado que son categorías contruidas a partir de un álgebra de caminos sobre un carcaj sin ciclos orientados, más adelante será descrita con mayor cuidado (ver [BMR⁺06, Proposición 6.9]). Este mismo concepto, en el contexto de categorías de módulos sobre álgebras preproyectivas de tipo Dynkin, también fue definido por Geiss, Leclerc y Schröer (ver [GLS08, Lema 5.1]).

Definición 2.2.4. Un álgebra Λ es *hereditaria* si cualquier ideal de Λ es proyectivo como Λ -módulo.

Se puede probar que un álgebra es hereditaria si y sólo si es un álgebra de caminos de un carcaj finito, conexo y acíclico. Por tanto la Observación 2.2.3 se refiere a álgebras hereditarias.

En el siguiente ejemplo construiremos la categoría de conglomerado de un álgebra hereditaria, definida por Buan, Marsh, Reineke, Reiten y Todorov en [BMR⁺06]. Esta categoría resulta de interés en este capítulo ya que es un ejemplo canónico de categorías 2-Calabi-Yau, Hom-finita y con objetos inclinantes de conglomerado.

Ejemplo 2.2.5. Consideremos k un cuerpo algebraicamente cerrado y Q un carcaj acíclico. Por tanto, el álgebra $\Lambda = k\langle Q \rangle$ es un álgebra de dimensión finita y dimensión global finita.

Bajo estas hipótesis, la categoría derivada acotada $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ es una k -categoría cuyos objetos son complejos acotados de Λ -módulos de dimensión finita. Y sus morfismos son obtenidos de los morfismos de complejos invirtiendo formalmente quasi-isomorfismos (véase [Nee01, Hap88] para una descripción más precisa).

Dado un objeto $M \in \mathcal{D}^b(\Lambda)$ denotamos por $M[1]$ el complejo trasladado definido por $M[1]^n := M^{n+1}$ y $d_{M[1]} = -d_M$. Esta categoría es triangulada, con el funtor suspensión dado por ésta operación. Más aún, la categoría $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ tiene un funtor de Serre $\mathbb{S} = {}_-\otimes_{\Lambda}^L D\Lambda$ y un trasladado de Auslander-Reiten $\tau = {}_-\otimes_{\Lambda}^L D\Lambda[-1]$.

Sea \mathbb{S}_2 el funtor $\mathbb{S}[-2] = \tau[-1]$. La *categoría de conglomerado* \mathcal{C}_{Λ} es la categoría de órbitas de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ por el funtor \mathbb{S}_2 . Los objetos indescomponibles de \mathcal{C}_{Λ} son los objetos indescomponibles de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$, y el espacio de morfismos entre dos objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ está dado por

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{\Lambda}}(X, Y) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(X, \mathbb{S}_2^i Y).$$

Se puede probar que la categoría \mathcal{C}_{Λ} es una categoría Hom-finita, el funtor de Serre coincide con el trasladado de Auslander-Reiten $\tau_{\mathcal{C}_{\Lambda}}$, tiene objetos inclinantes de conglomerado que son inducidos por módulos básicos inclinantes sobre un álgebra hereditaria Λ' derivadamente equivalente a Λ y es 2-Calabi-Yau.

Existen muchos ejemplos de categorías con las mismas propiedades que las de una categoría de conglomerado, por ejemplo:

- Categoría de módulos finitamente generados sobre álgebras pre-proyectivas de tipo Dynkin (ver [AIRT12, GLS08, GLS05]).
- Categorías asociadas a palabras de un grupo de Coxeter (ver [Ami09]).
- Categorías de conglomerado generalizadas (ver [Ami09]).
- Categorías asociadas a carcajes con potenciales (ver [Ami09, Pla11]).
- Categorías estables de módulos Cohen-Macaulay maximales sobre cierto tipo de anillos (ver [IY08, BIKR08]).

Todos estos ejemplos salvo las categorías estables de módulos Cohen-Macaulay tienen la propiedad que las álgebras 2-Calabi-Yau inclinadas, de cada una de ellas, son álgebras Jacobianas de dimensión finita.

Existe una fuerte relación en las categorías 2-Calabi-Yau, Hom-finitas con objetos incli-nantes de conglomerado y la categoría de módulos finitamente generados sobre las álgebras inclinadas de conglomerado. En el siguiente Teorema se establece dicha relación.

Teorema 2.2.6. [KR07, Proposición][BMR07, Teorema A] Sean \mathcal{C} una categoría 2-Calabi-Yau, Hom-finita y T un objeto incliante de conglomerado en \mathcal{C} . Entonces

$$\mathcal{C}/\text{add}(\tau_{\mathcal{C}}T) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, -)} \text{mód}(\text{End}_{\mathcal{C}}(T))^{op}$$

Para terminar esta sección enunciaremos un teorema que muestra que la mutación de Iyama-Yoshino de objetos incliantes de conglomerado conmuta con la mutación de carcajes con potenciales de Derksen-Weymann-Zelevinsky, esta última definida en el Capítulo 1.

Teorema 2.2.7. [BIRS11, Teorema 5.2] Sea T un objeto incliante de conglomerado en una categoría \mathcal{C} que es Hom-finita y 2-Calabi-Yau y sea T_i un sumando directo indescomponible de T . Denotemos por Λ al álgebra $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$. Supongamos que

- (a) existe un isomorfismo de álgebras $\Lambda \cong \mathcal{P}(Q, W)$ para algún carcaj con potencial (Q, W) , que no tiene lazos ni 2-ciclos en el vértice k correspondiente a T_i en el carcaj de $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$,
- (b) Λ satisface la **condición de anulación en k** , es decir,

$$\text{Hom}_{\Lambda}(\text{Ext}_{\Lambda}^1(D\Lambda, S_k), S_k) = 0$$

para el Λ -módulo simple S_k .

Entonces

$$\mathcal{P}(\mu_i(Q, W)) \cong \text{End}_{\mathcal{C}}(\mu_{T_i}(T)).$$

El Teorema anterior se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xleftarrow{\text{mutación de I-Y}} & T' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{End}_{\mathcal{C}}(T) \cong \mathcal{P}(Q, W) & & \text{End}_{\mathcal{C}}(T') \cong \mathcal{P}(Q', W') \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 (Q, W) & \xleftarrow{\text{mutación de DWZ}} & (Q', W')
 \end{array}$$

Figura 2.2: Relación entre la mutación IY y DWZ

2.3. Categorías n -anguladas

Las categorías trianguladas fueron definidas por Grothendieck y Verdier en [Ver77], e ,independientemente, por Puppe en [Pup62]. La Teoría inclinante de conglomerado y la Teoría de Auslander-Reiten superior definida por Iyama en [Iya07, Iya11], mostraron que hay una clase grande de categorías que naturalmente tienen n -angulos, pero no tienen triángulos. Las categorías n -anguladas fueron definidas por Geiss, Keller y Oppermann en [GKO13] modificando los axiomas de las categorías trianguladas en una forma natural. Además, dieron una clase grande de ejemplos de este tipo de categorías considerando subcategorías $(n-2)$ -inclinantes de conglomerado de categorías trianguladas que son estables bajo la $(n-2)$ potencia del functor suspensión. En esta sección se presenta dicha teoría y se mostrará la existencia de dichas categorías.

Definición 2.3.1. Sean \mathcal{F} una categoría aditiva con un automorfismo Σ , y n un entero mayor o igual a tres. Una sucesión de morfismos de \mathcal{F}

$$X_{\bullet} := (X_1 \xrightarrow{\alpha_1} X_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} X_n \xrightarrow{\alpha_n} \Sigma X_1)$$

es una n - Σ -sucesión. Su rotación a izquierda es la sucesión

$$(X_2 \xrightarrow{\alpha_2} X_3 \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_n} \Sigma X_1 \xrightarrow{(-1)^n \alpha_1} \Sigma X_2).$$

La n - Σ -sucesión de la forma $(TX)_\bullet := (X \xrightarrow{\mathbb{1}_X} X \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \Sigma X)$ para cada $X \in \mathcal{F}$, y sus rotaciones son llamadas *triviales*

Una n - Σ -sucesión es *exacta* si la sucesión inducida

$$\mathcal{F}(_, X_\bullet) : \dots \rightarrow \mathcal{F}(_, X_1) \rightarrow \mathcal{F}(_, X_2) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{F}(_, X_n) \rightarrow \mathcal{F}(_, \Sigma X_1) \rightarrow \dots$$

de funtores representables $\mathcal{F}^{op} \rightarrow Ab$ es exacta. En particular, las n - Σ -sucesiones triviales son exactas.

Definición 2.3.2. Un morfismo de n - Σ -sucesiones está dado por una sucesión de morfismos

$\varphi_\bullet = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccccccccccc} X_\bullet & & X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & X_3 & \cdots & X_n & \xrightarrow{\alpha_n} & \Sigma X_1 \\ \downarrow \varphi_\bullet & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \Sigma \varphi_1 \\ Y_\bullet & & Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_3} & Y_3 & \cdots & Y_n & \xrightarrow{\beta_n} & \Sigma X_1 \end{array}$$

En esta situación, decimos que φ_\bullet es un isomorfismo débil si para algún $1 \leq i \leq n$ tanto φ_i como φ_{i+1} son isomorfismos, donde $\varphi_{n+1} := \Sigma \varphi_1$.

Además, dos n - Σ -sucesiones son débilmente isomorfas si están relacionadas por una sucesión finita de isomorfismos débiles.

Definición 2.3.3. Decimos que una colección \diamond de n - Σ -sucesiones es una (*pre*-) n -angulación de (\mathcal{F}, Σ) y que sus elementos son n -angonos, si satisface los siguientes axiomas

- (F1) (a) La colección \diamond es cerrada bajo sumas directas y tomando sumandos directos.
 (b) Para todo $X \in \mathcal{F}$, la n - Σ -sucesión trivial $(TX)_\bullet$ pertenece a \diamond .
 (c) Para cada morfismo $\alpha_1 : X_1 \rightarrow X_2$ en \mathcal{F} , existe un n -ángulo cuyo primer morfismo es α_1 .

- (F2) Una n - Σ -sucesión X_\bullet pertenece a \diamond si y sólo si su rotación a izquierda

$$(X_2 \xrightarrow{\alpha_2} X_3 \xrightarrow{\alpha_3} \dots \xrightarrow{\alpha_n} \Sigma X_1 \xrightarrow{(-1)^n \Sigma \alpha_1} \Sigma X_2)$$

pertenece a \diamond .

(F3) Cada diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & X_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & X_3 & \cdots & X_n & \xrightarrow{\alpha_n} & \Sigma X_1 \\
 \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \Sigma \varphi_1 \\
 Y_1 & \xrightarrow{\beta_1} & Y_2 & \xrightarrow{\beta_2} & Y_3 & \cdots & Y_n & \xrightarrow{\beta_n} & \Sigma Y_1
 \end{array}$$

con filas en \diamond puede ser completada a un morfismo de n - Σ -sucesiones.

Más aún, si la colección \diamond satisface el siguiente axioma, entonces es llamada n -angulación de (\mathcal{F}, Σ) y la triada $(\mathcal{F}, \Sigma, \diamond)$ es una *categoría n -angulada*.

(F4) En la situación de (F3) los morfismo $\varphi_3, \varphi_4, \dots, \varphi_n$ se pueden escoger de tal manera que el cono $C(\varphi_\bullet)$:

$$X_2 \oplus Y_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\alpha_2 & 0 \\ \varphi_2 & \beta_1 \end{pmatrix}} X_3 \oplus Y_2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\alpha_3 & 0 \\ \varphi_3 & \beta_2 \end{pmatrix}} \cdots \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\alpha_n & 0 \\ \varphi_n & \beta_{n-1} \end{pmatrix}} \Sigma X_1 \oplus Y_n \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\Sigma \alpha_1 & 0 \\ \Sigma \varphi_1 & \beta_n \end{pmatrix}} \Sigma X_2 \oplus \Sigma Y_1$$

pertenezca a \diamond .

2.3.1. Existencia y construcción de categorías n -anguladas

En esta subsección construiremos categorías n -anguladas a partir de $(n - 2)$ -subcategorías inclinantes de conglomerado que son estables bajo la $(n - 2)$ potencia del functor suspensión y mostraremos que la clase de subcategorías inclinantes de conglomerado es no vacía. Recordamos la definición de subcategoría inclinante de conglomerado.

Definición 2.3.4. Sea \mathcal{T} una categoría triangulada, denotemos por Σ_3 el functor suspensión de \mathcal{T} .

- Una subcategoría $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ es *functorial finita* si para todo $X \in \mathcal{T}$, existe un morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(C, X)$ y $g \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, C')$ tal que $C, C' \in \mathcal{S}$ y

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(_, C) \xrightarrow{f} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(_, X) \longrightarrow 0 \text{ y } \text{Hom}_{\mathcal{T}}(C', _) \xrightarrow{g} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, _) \longrightarrow 0$$

son exactas en \mathcal{T} .

- Una subcategoría $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ es una categoría *inclinante de d -conglomerado* si es funtorialmente finita y

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{X \in \mathcal{T} \mid \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{S}, \Sigma_3^i X) = 0 \text{ para cada } i \in \{1, \dots, d-1\}\} \\ &= \{X \in \mathcal{T} \mid \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, \Sigma_3^i \mathcal{S}) = 0 \text{ para cada } i \in \{1, \dots, d-1\}\}\end{aligned}$$

Esta categoría ya había sido definida por Iyama en [?], bajo el nombre de subcategoría $(d-1)$ -ortogonal maximal, pero en el contexto de este trabajo es más conveniente referirse a ella como categoría inclinante d -conglomerado.

Ejemplo 2.3.5. ■ Observe que la subcategoría $\text{add } T$, con T un objeto inclinante de conglomerado T , es una categoría inclinante de 2-conglomerado.

- De manera general, podemos construir categorías de m -conglomerado a partir de un álgebra hereditaria. Como en el Ejemplo 2.2.5, dada un álgebra hereditaria Λ consideramos la categoría derivada acotada $\mathcal{D}^b(A)$. La categoría de m -conglomerado es la categoría de órbitas

$$\mathcal{C}_m(\Lambda) = \mathcal{D}^b(A) / \tau^{-1}[m].$$

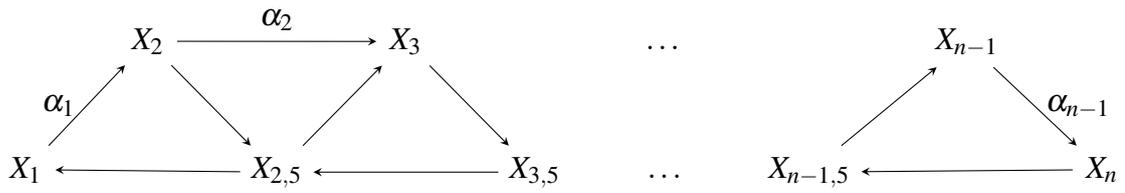
Se puede probar que $\mathcal{C}_m(\Lambda)$ es un categoría Hom-finita, $(m+1)$ -Calabi-Yau, con objetos inclinados de $(m+1)$ -conglomerado y $\text{add } T$ es una subcategoría inclinante de $(m+1)$ -conglomerado, para todo T objeto inclinante de $(m+1)$ -conglomerado.

El siguiente Teorema nos da lo que llaman Geiss, Keller y Oppermann la *construcción estándar* de categorías n -anguladas.

Teorema 2.3.6. [GKO13, Teorema 1, Sección 4] Sea \mathcal{T} una categoría triangulada con una subcategoría \mathcal{F} inclinante $(n-2)$ de conglomerado, la cual es cerrada bajo Σ_3^{n-2} , donde Σ_3 denota el funtor suspensión de \mathcal{T} . Entonces $(\mathcal{F}, \Sigma_3^{n-2}, \diamond)$ es una categoría n -angulada, donde \diamond es la clase de todas las sucesiones

$$X_1 \xrightarrow{\alpha_1} X_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} X_n \xrightarrow{\alpha_n} \Sigma_3^{n-2} X_1$$

tal que existe un diagrama



con $X_i \in \mathbb{T}$ para todo $i = \{1, \dots, n\}$, tal que todos los ciclos orientados son triángulos en \mathcal{T} , todos los ciclos no-orientados conmutan, y α_n es la composición de la sucesión inferior del diagrama.

De la definición de subcategoría inclinada $(n - 2)$ -conglomerado y del Teorema 2.3.6 se sigue el siguiente corolario.

Corolario 2.3.7. [GKO13, Observación 4.2] Supongamos que \mathcal{T} y \mathcal{F} satisfacen las condiciones del Teorema 2.3.6 y que \mathcal{T} tiene un funtor de Serre \mathbb{S} . Entonces \mathcal{F} es cerrado bajo \mathbb{S} .

Como vimos en la segunda sección de este capítulo, un álgebra 2-Calabi-Yau inclinada es un álgebra de endomorfismos $\text{End}_{\mathcal{C}}(T)$ de un objeto T inclinante de conglomerado de una categoría \mathcal{C} . Las álgebras auto-inyectivas 2-Calabi-Yau inclinadas permiten construir álgebras 4-anguladas. Recordemos la definición de álgebra auto-inyectiva.

Definición 2.3.8. Una k -álgebra Λ es *auto-inyectiva* si Λ es inyectiva como Λ -módulo, es decir, todo los módulos proyectivos en $\text{mód } \Lambda$ son inyectivos.

Proposición 2.3.9. [GKO13, Proposición 6.4, Sección 6.3] Sea Λ un álgebra auto-inyectiva 2-Calabi-Yau. Entonces la subcategoría $\text{proj } \Lambda$ es una categoría 4-angulada, con funtor de Nakayama v como suspensión y la categoría estable $\underline{\text{mód}} \Lambda$ es 3-Calabi-Yau.

Hay varios ejemplos de álgebras auto-inyectivas 2-Calabi-Yau inclinadas. En el contexto de categorías de conglomerado sobre un álgebra hereditaria Ringel en [Rin08] clasifica todas las álgebras auto-inyectivas de inclinadas de conglomerado. En el último capítulo mostraremos una familia de álgebras auto-inyectivas 2-Calabi-Yau inclinadas.

Capítulo 3

Álgebras Jacobianas de superficies con puntos marcados

En este capítulo introduciremos una familia de álgebras Jacobianas que son construidas a partir de triangulaciones ideales de superficies con un conjunto finito de puntos marcados. En la primera sección definiremos estos objetos geométricos junto a una transformación llamada “intercambio de arcos”. En la segunda sección describiremos el algoritmo para construir carcajes con potencial a partir de triangulaciones ideales y cuya construcción permite relacionar el intercambio de arcos con la mutación de carcajes con potenciales. En la última sección demostraremos nuestro segundo resultado que da una respuesta parcial a un problema abierto durante algunos años en el área. Mostraremos que las triangulaciones ideales de una esfera con $n > 4$ puntos marcados determina un álgebra Jacobiana de dimensión finita, este resultado se en [TVD].

3.1. Triangulaciones de superficies con puntos marcados

En esta sección presentaremos un resumen estándar de topología combinatoria de superficies. Dicho resumen se basa en el artículo de Fomin, Shapiro y Thurston [FST08] y en el Libro de Springer [Spr57]. Empezaremos por definir los objetos geométricos con los que trabajaremos.

Definición 3.1.1. Una superficie S compacta con frontera es una superficie compacta de género g de la cual han sido removidos un número finito de discos disjuntos D_1, \dots, D_r , con $r > 0$.

La Teoría que desarrollaremos está definida para superficies compactas, conexas 2 - dimensionales de Riemann con frontera (posiblemente vacía). Para ver una definición formal de superficie de Riemann véase, por ejemplo, [Spr57, pág 59]. Una propiedad importante sobre las superficies de Riemann que nos permitirá tener un modelo de nuestros objetos se enuncia en el siguiente Teorema.

Teorema 3.1.2. [Spr57, Teorema 5.11 y 9.16] *Toda superficie de Riemann es orientable y triangulable. Más aún, la superficie puede ser triangulada de tal manera que las aristas de los triángulos sean arcos analíticos*

El siguiente Teorema fue dado por primera vez en 1934 por Seifert y Threlfall en [ST80]. Su resultado es más general que el dado aquí, pues caracteriza salvo homeomorfismo toda superficie compacta y conexa.

Teorema 3.1.3. *Toda superficie orientable y compacta es homeomorfa a una de las siguientes.*

- una esfera, cuando es de género cero;
- una esfera con g asas pegadas, cuando es de género g

Las superficies de género $g \neq 0$ descritas en el Teorema 3.1.3 tienen una descripción en términos de polígonos con $4g$ -lados, llamadas formas normales, ver [Spr57, Capítulo 5, Sección 5], que en muchas ocasiones suelen ser de gran ayuda al querer construir triangulaciones ideales.

Ahora que tenemos una descripción salvo homeomorfismo de los objetos geométricos con los que trabajaremos, definiremos una superficie con puntos marcados.

Definición 3.1.4. Una *superficie con puntos marcados* es un par (S, \mathbb{M}) , donde S es una superficie de Riemann compacta y conexa, posiblemente con frontera vacía, y \mathbb{M} es un subconjunto finito no-vacío de S que contiene al menos un punto en cada componente conexa de la frontera de S . A los elementos del conjunto \mathbb{M} les llamaremos *puntos marcados*. Los puntos marcados que están en el interior de S son llamados *punciones o ponchaduras*; el conjunto de este tipo de puntos es denotado por \mathbb{P} . En la terminología de [FG07] éstas superficies se llaman *superficies ciliadas*.

Nuestra intención es definir cierto tipo de triangulaciones en superficies con puntos marcados, que en ciertas circunstancias coinciden con las triangulaciones usuales de superficies, cuyos 0-simplejos coinciden con los puntos marcados. Por ello, eliminaremos aquellas superficies que no son triangulables o cuyas triangulaciones son triviales. Asumiremos que (S, \mathbb{M}) no es ninguna de las siguientes superficies:

- una esfera con menos de 4 punciones;
- un monogón, diagón o triángulo sin punciones;
- un monogón o diagón con una punción.

Un *monogón* (resp. *diagón*, *triángulo*) es un disco con exactamente uno (resp. dos, tres) puntos marcados en la frontera.

Si bien, la superficie S está determinada salvo homeomorfismo por el Teorema 3.1.3, la superficie con puntos marcados (S, \mathbb{M}) también lo está, salvo homeomorfismo, con la siguiente información:

- el género g de la superficie de Riemann S ;
- el número b de componentes de frontera;
- la partición entera de b , que describe el número de puntos marcados en cada componente de la frontera;
- el número p de punciones.

En la Figura 3.1 se muestra una superficie de género cero, es decir, una esfera, con $(n + 2)$ -punciones.

Definición 3.1.5. Sea (S, \mathbb{M}) una superficie con puntos marcados.

(1) Un *arco* es una curva i en S tal que:

- Los puntos finales de i pertenecen a \mathbb{M} ;
- la curva i no se autointersecta, excepto quizá en los puntos finales;

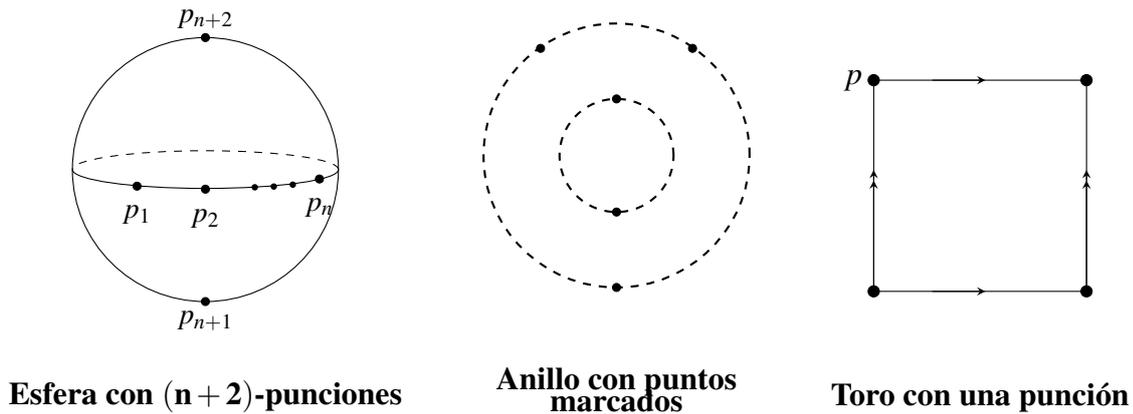


Figura 3.1: Superficies con puntos marcados

- los puntos de i que no son los puntos finales no pertenecen a \mathbb{M} ni tampoco a la frontera;
 - la curva i no corta un monogón sin punciones ni un diagón sin punciones, es decir, i no es contractible a M ni a la frontera de S .
- (2) Dos arcos i_1 y i_2 son *isotópicos relativos en \mathbb{M}* si existe una función continua $H : [0, 1] \times S \rightarrow S$ tal que
- (a) $H(0, x) = x$ para todo $x \in S$;
 - (b) $H(1, i_1) = i_2$;
 - (c) $H(t, m) = m$ para todo $t \in I$ y todo $m \in \mathbb{M}$;
 - (c) para todo $t \in I$, la función $H_t : S \rightarrow S$ dada por $x \mapsto H(t, x)$ es un homeomorfismo.

Un arco va a ser considerado como la clase de isotopía relativa en \mathbb{M} .

- (3) Dos arcos son *compatibles* si hay curvas en sus respectivas clases de isotopía tal que no se intersecan en el interior de S .
- (4) [Iva02, Sección 5.5.] Una *triangulación ideal* de (S, \mathbb{M}) es una colección maximal \mathbb{T} de arcos compatibles dos a dos. Los arcos de una triangulación cortan la superficie S en *triángulos ideales*. Los tres lados de un triángulo ideal pueden no ser diferentes entre ellos, es decir, que permitimos triángulos *auto-pegados* (ver Figura 3.2) y también permitimos que dos triángulos compartan más de un lado.



Figura 3.2: Triángulo ideal auto-pegado

La definición de triangulación ideal fue dada por Hatcher en [Hat91] para superficies compactas y conexas (posiblemente con frontera) con el nombre de *sistema de curvas*. Dicha definición fue introducida por el autor con la idea generalizar el Teorema de Harer, donde se permite un conjunto de vértices más general y un familia más grande de complejos cuyos simplejos corresponden a un sistema de curvas.

El número n de arcos de una triangulación ideal de (S, \mathbb{M}) es llamado el *rango* de (S, \mathbb{M}) . Utilizando la característica de Euler se puede calcular la siguiente fórmula para el rango (ver [FG07, Sección 2]).

Proposición 3.1.6. [FST08, Proposición 2.10] *Cada triangulación ideal consiste de*

$$n = 6g + 3b + 3p + c - 6$$

arcos, donde g es el género de S , b es el número de componente de fronteras, p es el número de punciones, y c es el número de puntos marcados en la frontera.

Ejemplo 3.1.7. En este ejemplo consideraremos un toro con una punción. Recordemos que el toro tiene género 0 y es una superficie cerrada, por tanto, utilizando la fórmula de la Proposición 3.1.6, toda triangulación tiene 3 arcos. En este caso existe una única triangulación, la que se muestra en la Figura 3.3.

En muchas situaciones es conveniente tener triangulaciones ideales con ciertas propiedades, por ejemplo, tener cierta cantidad de arcos incidentes a una punción o no tener triángulos auto-pegados. Siguiendo a Ladkani en [Ladc], definiremos algunas de estas propiedades.

Definición 3.1.8. Sea (S, \mathbb{M}) una superficie con puntos marcados. Una triangulación \mathbb{T} de (S, \mathbb{M}) tiene la *propiedad*

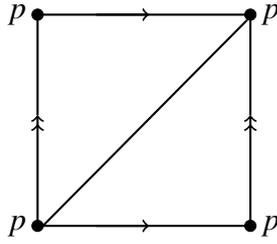


Figura 3.3: Una triangulación de un toro con una punción

- $T(3)$ si cada punción $p \in \mathbb{P}$ tiene al menos tres arcos de \mathbb{T} incidentes a p ;
- $T(3\frac{1}{2})$ si tiene la propiedad $T(3)$ y además cada arco tiene un punto final con al menos cuatro arcos incidentes a él;
- $T(4)$ si cada punción $p \in \mathbb{P}$ tiene al menos 4 arcos de \mathbb{T} incidentes a p .

Teorema 3.1.9. *Sea (S, \mathbb{M}) una superficie con puntos marcados que no sean las listadas en la Definición 3.1.4.*

(1) [FST08, Lema 2.13] *Existe una triangulación sin triángulos autopegados.*

(2) [Ladc, Proposición 5.1] *Supongamos que la superficie es cerrada.*

- *Si (S, \mathbb{M}) no es una esfera con 4 o 5 punciones, entonces existe una triangulación con propiedad $T(4)$.*
- *Si (S, \mathbb{M}) es una esfera con 5 punciones, entonces existe una triangulación de tipo $T(3\frac{1}{2})$, pero no tiene triangulaciones de tipo $T(4)$.*
- *Si (S, \mathbb{M}) es una esfera con 4 punciones, entonces existe una triangulación de tipo $T(3)$, pero no tiene una triangulación de tipo $T(3\frac{1}{2})$.*

Ahora que hemos descrito, salvo homeomorfismo tanto los objetos geométricos con los que trabajaremos como las triangulaciones ideales en ellos, vamos a definir una transformación, llamada "flip" en inglés, que permite relacionar todas las triangulaciones ideales de una superficie con puntos marcados.

Definición 3.1.10. *Sea i un arco que no es el lado auto-pegado de un triángulo auto-pegado de una triangulación ideal \mathbb{T} de (S, \mathbb{M}) . Entonces existe un único arco i' , diferente de i , tal*

que $\mathbb{T}' = \{\mathbb{T} \setminus \{i\}\} \cup \{i'\}$ es una triangulación ideal. Un *intercambio* o "*flip*" del arco i es una transformación de \mathbb{T} que elimina el arco i y lo reemplaza por i' .

Ejemplo 3.1.11. En este ejemplo tenemos un pentágono con una punción y dos triangulaciones relacionadas por el intercambio de arco i .

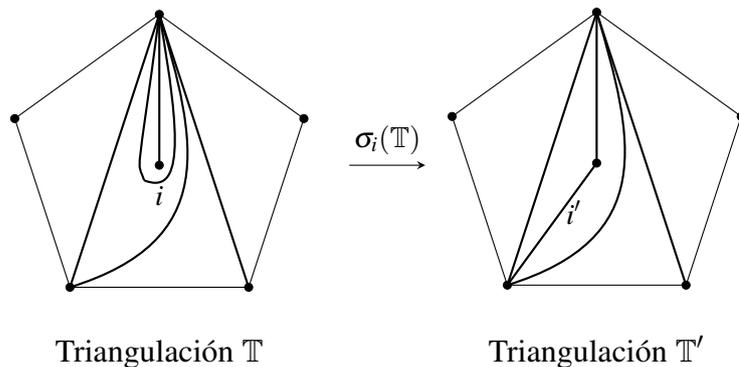


Figura 3.4: Intercambio del arco i en la triangulación \mathbb{T}

Observemos que el intercambio de arcos está sólo definido para arcos que no sean el lado auto-pegado de un triángulo auto-pegado, para poder definir lo Fomin, Shapiro y Thurston en [FST08] introducen el concepto de *triangulación etiquetada*, cuyos elementos son *arcos etiquetados* “compatibles”. Para las triangulaciones etiquetadas se tienen, en general, los resultados análogos de las triangulaciones ideales.

Definición 3.1.12. [FST08, Definición 7.1] Cada arco γ de una superficie (S, \mathbb{M}) tiene dos *finales* que se obtienen de cortar de manera arbitraria a γ en tres piezas y eliminar la pieza de en medio. Supongamos que γ no corta a un monogón con una punción. Decimos que γ es un *arco etiquetado* si sus finales están etiquetados de dos posibles maneras, muesca o simple, tales que las siguientes condiciones se satisfacen:

- (a) si un punto final de γ están en la frontera, entonces el final más cercano a ese punto está etiquetado llano;
- (b) ambos finales de un lazo están etiquetados de la misma manera.

En las figuras, las etiquetas simples son omitidas, mientras que la etiqueta muesca está representada por el símbolo \bowtie .

Teorema 3.1.13. *Sea (S, \mathbb{M}) una superficie con puntos marcados. Entonces*

- *[FST08, Proposición 3.8] Cuales quiera dos triangulaciones ideales están relacionada por una sucesión de intercambios de arcos;*
- *[FST08, Corolario 3.9] Toda triangulación ideal puede ser transformada en una triangulación sin triángulos auto-pegados por una sucesión de intercambio de arcos.*

3.2. Carcaj con potencial de una triangulación ideal

En esta sección daremos un algoritmo para construir un carcaj con potencial a partir de una triangulación ideal de una superficie con puntos marcados. Dicha construcción conmuta con la mutación de carcajes con potenciales y con el intercambio de arcos de una triangulación. Empezaremos por definir el carcaj de una triangulación.

3.2.1. El carcaj de una triangulación

Toda triangulación ideal \mathbb{T} tiene un carcaj $Q(\mathbb{T})$ de manera natural, descrito por primera vez por Fock-Goncharov en [FG07]. En esta sección vamos a construir el carcaj $Q(\mathbb{T})$ siguiendo a Fomin-Shapiro-Thruston en [FST08, Section 13].

Una observación importante para poder describir el carcaj $Q(\mathbb{T})$ de una triangulación ideal es que toda triangulación ideal puede obtenerse de la siguiente manera:

- Considerar una colección de *piezas de rompecabezas* como las que se muestran en la Figura 3.5 (un triángulo, un diágono con una punción triangulado, o un monogón con dos punciones triangulado)
- Considerar un pegado parcial de los lados exteriores de esas piezas de rompecabezas, cuidando de no pegar nunca dos lados de una misma pieza de rompecabezas y de haber pegado todas las piezas de rompecabezas de la colección
- Pegar las piezas de rompecabezas por los lados, asegurándose que las orientaciones coincidan con la superficie.

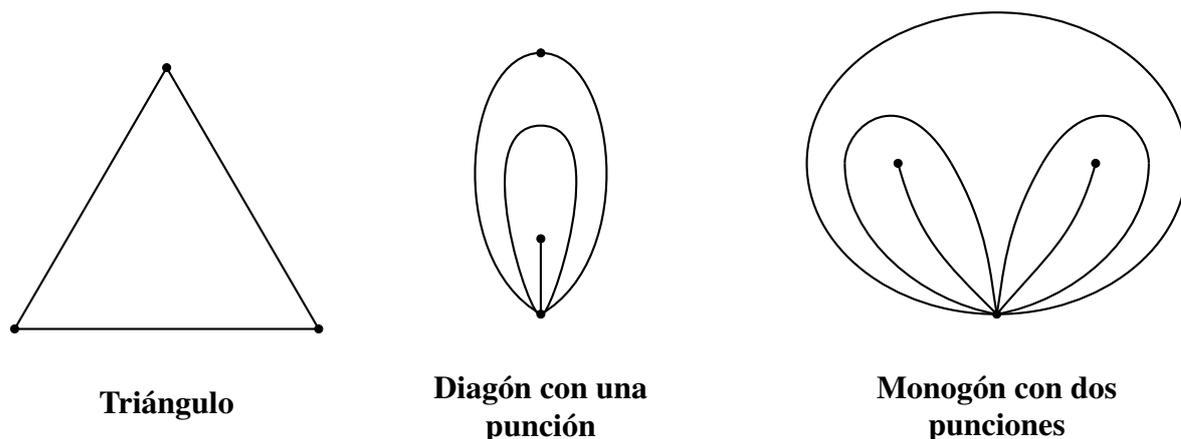


Figura 3.5: piezas de rompecabezas

Cada una de las piezas de rompecabezas de la Figura 3.5 da lugar a tres diferentes carcajes con dos diferentes tipos de vértices, esta distinción será importante más adelante. En la Figura 3.6, se muestran cada uno de los carcajes, los cuales llamaremos *bloques*.

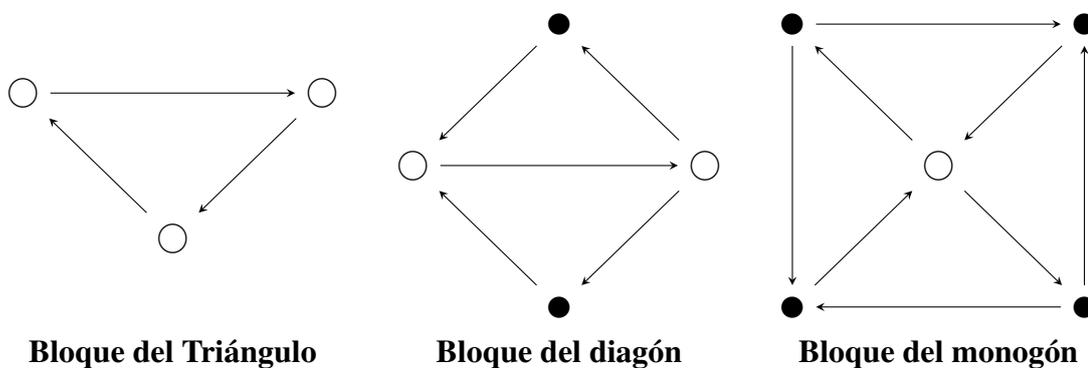


Figura 3.6: Carcajes de las piezas de rompecabezas

Para construir el carcaj de una triangulación ideal, tenemos que tomar en cuenta si alguno de los arcos de la pieza del rompecabezas del cual proviene es o no parte de la frontera. Es decir, en el caso del Bloque del triángulo, si uno de los arcos es parte de la frontera tenemos un carcaj que llamaremos de tipo I. En caso de que ningún arco es parte de la frontera, tenemos el carcaj completo, al cual llamamos bloque de tipo II. En el caso del Bloque del diagón si alguno de los arcos i o j son frontera, entonces obtendremos dos posibles carcajes, llamados de tipo IIIa y IIIb. En caso de que ningún arco del bloque del diagón es frontera, tenemos el bloque

completo, llamado bloque de tipo IV. En el caso del Bloque del monogón ninguno de los arcos pueden ser frontera, por tanto tenemos el bloque completo y es llamado de tipo V.

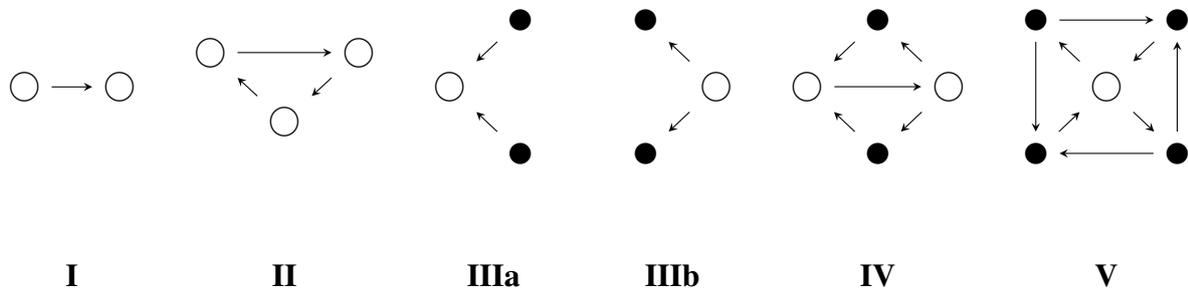


Figura 3.7: Bloques del triángulo

El *carcaj no reducido* $\tilde{Q}(\mathbb{T})$ asociado a \mathbb{T} es el carcaj que se obtiene de pegar los bloques de la Figura 3.7 de acuerdo al pegado de las piezas de rompecabezas de la triangulación \mathbb{T} . Observe que en este pegado pueden aparecer flechas dobles o 2-ciclos.

El *carcaj* $Q(\mathbb{T})$ asociado a \mathbb{T} es el carcaj que se obtiene de $\tilde{Q}(\mathbb{T})$ al eliminar los dos ciclos.

La única excepción es la triangulación de una esfera con 4 punciones que se obtiene al pegar 3 triángulos autopegados, que si bien mencionamos que no íbamos a considerarla dentro de nuestros objetos geométricos, esta superficie resulta de interés dentro de la Teoría de Representaciones.

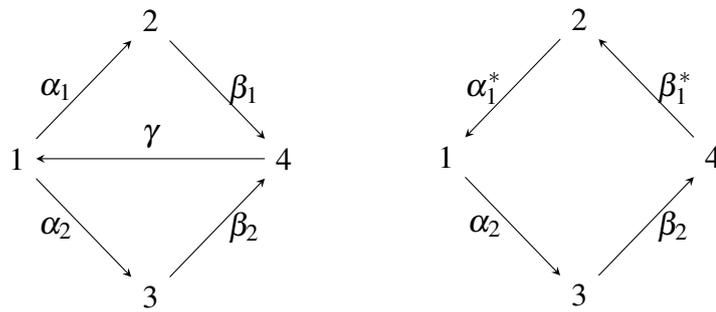
Teorema 3.2.1. [FST08, Proposición 4.8] Sean \mathbb{T} y \mathbb{T}' triangulaciones ideales de (S, \mathbb{M}) . Si \mathbb{T}' es obtenida de \mathbb{T} por el intercambio de un arco i , entonces $Q(\mathbb{T}') = \mu_i(Q(\mathbb{T}))$.

Ejemplo 3.2.2. En este ejemplo consideraremos el intercambio de arcos del ejemplo 3.1.11. En la Figura 3.8 tenemos los respectivos carcajes de las triangulaciones \mathbb{T} y \mathbb{T}'

Como se puede observar $\mu_2(Q(\mathbb{T}))$ coincide con el carcaj $Q(\mathbb{T}')$, relación que se sabe como cierta por el Teorema 3.2.1.

3.2.2. El potencial de una triangulación

Recordemos que dado un carcaj Q es posible considerar diferentes potenciales. En este trabajo consideraremos el potencial definido por Labardini-Fragoso en [LF09] para triangula-



Carcaj de la triangulación \mathbb{T} Carcaj de la triangulación \mathbb{T}'

Figura 3.8: Carcajes correspondientes al intercambio de arco 2

ciones ideales, el cual, es no-degenerado y posee otras propiedades que resultan de interés para nuestro trabajo, que mencionaremos más adelante.

La definición de potencial dada en [LF09] pide considerar un escalar fijo para cada punción y éstos son utilizados para definir los coeficientes que aparecen en el potencial. Geiss, Labardini-Fragoso y Schröer en [GLFS], prueban que si (S, \mathbb{M}) no es la esfera con 5 punciones, el potencial de la triangulación ideal es independiente de dicha selección, ya que todos los potenciales inducen álgebras Jacobianas isomorfas. En esta sección definiremos el potencial sin considerar escalares fijos, pero los resultados enunciados son para todas las superficies con puntos marcados.

Primero definiremos el potencial no reducido de $\tilde{Q}(\mathbb{T})$, para ello, observemos que tenemos dos tipos de ciclos:

- Los 3-ciclos que provienen de una pieza interior de rompecabezas de la triangulación \mathbb{T} ;
- y los ciclos que rodean una punción.

Definición 3.2.3. [LF09] Denotemos por $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ a la familia de todos los ciclos de la lista anterior. Definamos el *potencial no-reducido* $\tilde{W}(\mathbb{T})$ de la triangulación ideal \mathbb{T} como la suma de todos los ciclos de la familia $\mathcal{A}(\mathbb{T})$.

Como hemos mencionado anteriormente, el carcaj no-reducido $\tilde{Q}(\mathbb{T})$ puede tener 2-ciclos. En el caso del potencial no-reducido $\tilde{W}(\mathbb{T})$ también puede tener 2-ciclos, que corresponden a un ciclo que rodea una punción, es decir, una punción con 2 arcos incidentes.

Definición 3.2.4. Sea \mathbb{T} una triangulación ideal de una superficie (S, \mathbb{M}) . El carcaj con potencial $(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ es la parte reducida del carcaj con potencial $(\widetilde{Q}(\mathbb{T}), \widetilde{W}(\mathbb{T}))$.

Ejemplo 3.2.5. En este ejemplo vamos a retomar el Ejemplo 3.1.7, en el cual consideramos un toro con una punción. Observemos que la triangulación \mathbb{T} del toro consiste en dos triángulos, por tanto el carcaj está formado por dos bloques de tipo I, respetando el pegado de lados de los dos triángulos de \mathbb{T} . En la Figura 3.9 se muestra el carcaj $\widetilde{Q}_{\mathbb{T}}$. Para calcular el potencial $W(\mathbb{T})$, denotemos por $\alpha_i \beta_i \gamma_i$, para $i = 1, 2$, los 3-ciclos que provienen de cada uno de los bloques que forman $\widetilde{Q}_{\mathbb{T}}$. Puesto que la superficie tiene una punción p tenemos que considerar además el ciclo que rodea a p , en este caso es $\alpha_1 \beta_2 \gamma_1 \alpha_2 \beta_1 \gamma_2$, por tanto el potencial $\widetilde{W}(\mathbb{T})$ es

$$\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 + \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 + \alpha_1 \beta_2 \gamma_1 \alpha_2 \beta_1 \gamma_2.$$

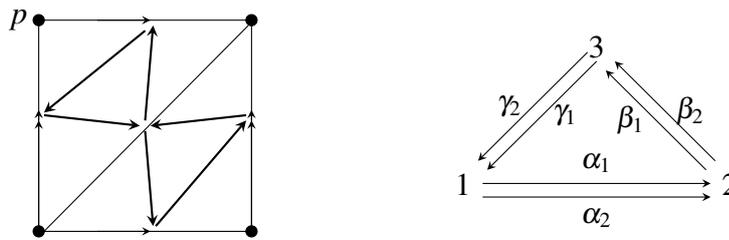


Figura 3.9: Carcaj de la triangulación de un toro con una punción

Observemos que $(\widetilde{Q}(\mathbb{T}), \widetilde{W}(\mathbb{T}))$ es un carcaj con potencial reducido, pues no tiene 2-ciclos, por tanto $(\widetilde{Q}(\mathbb{T}), \widetilde{W}(\mathbb{T})) = (Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$.

Teorema 3.2.6. [LF09, GLFS] Sea \mathbb{T} y \mathbb{T}' triangulaciones marcadas de una superficie con puntos marcados (S, \mathbb{M}) . Si \mathbb{T} y \mathbb{T}' están relacionados por un intercambio de un arco i , entonces

- (1) [LFb] los carcajes con potenciales $\mu_i(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ y $(Q(\mathbb{T}'), W(\mathbb{T}'))$ son equivalentes a derecha si (S, \mathbb{M}) no es una esfera con exactamente 5 punciones;
- (2) [GLFS] Supongamos que (S, \mathbb{M}) es una esfera con 5 punciones. Entonces el carcaj $\mu_i(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ es equivalente a $(Q(\mathbb{T}'), W(\mathbb{T}'), \vec{\lambda})$ para alguna selección de escalares $\vec{\lambda}$.

Como consecuencia, todos los carcajes con potenciales $(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ asociados a una triangulación marcada de (S, \mathbb{M}) son no-degenerados-.

3.3. Álgebras Jacobianas de una esfera con punciones

En esta sección estudiaremos las álgebras Jacobianas que provienen de una esfera con $(n + 2)$ -punciones con $n > 2$. El caso de una esfera con exactamente 4 punciones fue estudiado por primera vez por Barot y Geiss en [BG12, Sección 5]. Ellos probaron que el álgebra de conglomerado tubular de tipo $(2,2,2,2)$ está relacionada con las triangulaciones de una esfera con 4 punciones. El carcaj de una de las triangulaciones de una esfera con 4 punciones corresponde al carcaj de la Figura 1.8 de la última sección del Capítulo 1. A continuación se enuncia el resultado principal de esta sección y el cual se encuentra en [TVD].

Teorema 3.3.1. *Sea (S, \mathbb{M}) una esfera con $(n + 2)$ -punciones y $n \geq 2$. Entonces el álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ de cualquier triangulación ideal \mathbb{T} es de dimensión finita.*

Es un hecho conocido que la propiedad de que un álgebra Jacobiana sea de dimensión finita es preservado por mutaciones. Además, por el Teorema 3.2.6 tenemos que el potencial de una triangulación es no-degenerado y la mutación del carcaj con potencial $(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ conmuta con el intercambio de arcos de una triangulación \mathbb{T} , por tanto, basta con exhibir una triangulación ideal \mathbb{T} para cada esfera con n -punciones, que posea esta propiedad.

Consideremos la triangulación ideal \mathbb{T} de la Figura 3.10. Por una conveniencia de notación etiquetaremos a la punción del polo norte y sur con p_{n+1} y p_{n+2} . Del lado derecho de esta figura se muestra el carcaj $Q(\mathbb{T})$ asociado a \mathbb{T} , respetaremos la etiquetación de las flechas del carcaj en lo que resta de la sección.

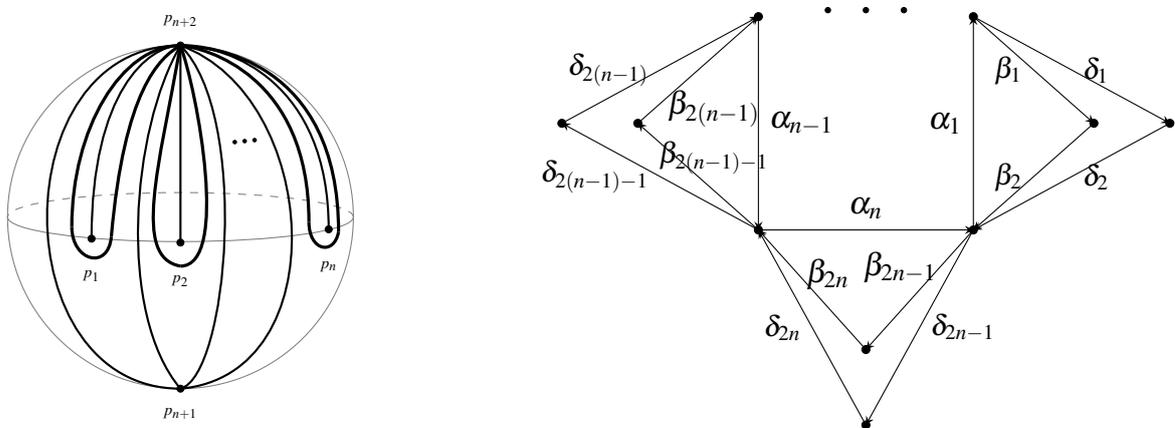


Figura 3.10: Triangulación \mathbb{T} de la esfera con $(n + 2)$ -punciones

Observe que la triangulación \mathbb{T} presenta sólo bloques de tipo IV (ver Figura 3.7), y por cada bloque tenemos dos 3-ciclos que son sumandos del potencial $W(\mathbb{T})$, es decir, $\alpha_i \beta_{2i-1} \beta_{2i} + \alpha_i \delta_{2i-1} \delta_{2i}$. Además, tenemos sólo dos punciones, la del polo norte y la del polo sur, que tienen más de un arco incidente a ellos, por tanto, para el polo norte tenemos el ciclo $\delta_{2n-1} \delta_{2n} \dots \delta_1 \delta_2$ y para el polo sur el ciclo $\alpha_1 \dots \alpha_n$ que aparecen como sumandos del potencial $W(\mathbb{T})$. Por tanto, el potencial $W(\mathbb{T})$ de la triangulación \mathbb{T} es:

$$\begin{aligned} W(\mathbb{T}) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_{2i-1} \beta_{2i} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{2i-1} \delta_{2i} \\ &+ \alpha_1 \dots \alpha_n + \delta_{2n-1} \delta_{2n} \dots \delta_1 \delta_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Denotemos por $W = W(\mathbb{T})$ al potencial definido en la Ecuación 3.1 y por $Q = Q(\mathbb{T})$ al carcaj de la Figura 3.10. Estableceremos algunas identidades útiles para probar el Teorema 3.3.1, para el álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q, W)$.

Observación 3.3.2. En la última sección del Capítulo 1, trabajamos con carcajes cíclicamente orientados, es decir, carcajes donde todo ciclo sin cuerdas es orientable y para este tipo de carcajes definimos un potencial de tal manera que el álgebra Jacobiana sea de dimensión finita. El carcaj de la esfera con $(n+2)$ -punciones de la Figura 3.10 es un carcaj cíclicamente orientado y el potencial $W(\mathbb{T})$ no es un potencial primitivo. Además el carcaj $Q(\mathbb{T})$ no satisface todas las condiciones del Teorema 1.4.6, en particular no cumple que todo vértice tenga a los más dos flechas incidentes. El carcaj del Ejemplo 1.4.4, corresponde a una triangulación de la esfera con 4-punciones.

Lema 3.3.3. *Las siguientes identidades se cumplen en el álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q, W)$:*

$$\beta_{2i-1} \beta_{2i} \delta_{2(i-1)-1} \delta_{2(i-1)} = -\beta_{2i-1} \beta_{2(i)} \beta_{2(i-1)-1} \beta_{2(i-1)} \quad (3.2)$$

$$= \delta_{2i-1} \delta_{2i} \beta_{2(i-1)-1} \beta_{2(i-1)} \quad (3.3)$$

$$= \delta_{2i-1} \delta_{2i} \delta_{2(i-1)-1} \delta_{2(i-1)} \quad (3.4)$$

para todo $i = \{1, 2, \dots, n\}$

Demostración. Denotemos por Λ al álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q, W)$. Observemos que la derivada cíclica de $\partial_{\alpha_{i-1}}(W)$ es igual a

$$\delta_{2(i-1)-1}\delta_{2(i-1)} + \alpha_i \dots \alpha_{i-2} + \beta_{2(i-1)-1}\beta_{2(i-1)}, \quad (3.5)$$

por tanto, en Λ tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \beta_{2i-1}\beta_{2i}\delta_{2(i-1)-1}\delta_{2(i-1)} &= -\beta_{2i-1}\beta_{2i}\alpha_i \dots \alpha_{i-2} \\ &\quad -\beta_{2i-1}\beta_{2i}\beta_{2(i-1)-1}\beta_{2(i-1)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Notemos que $\partial_{\beta_{2i-1}}(W) = \beta_{2i}\alpha_i$, por tanto el primer termino de lado derecho de la igualdad es un elemento del ideal Jacobiano, y por tanto es cero en Λ , por tanto de la Igualdad 3.6

$$\beta_{2i-1}\beta_{2i}\delta_{2(i-1)-1}\delta_{2(i-1)} = -\beta_{2i-1}\beta_{2i}\beta_{2(i-1)-1}\beta_{2(i-1)},$$

que coincide con la primera igualdad 3.2. En el caso de la Igualdad 3.3, la prueba es similar a la de la Igualdad 3.2, por tanto no la desarrollaremos.

Para probar la tercera identidad, notemos que de la derivada cíclica $\partial_{\alpha_i}(W)$ tenemos

$$\begin{aligned} \beta_{2i-1}\beta_{2i}\delta_{2(i-1)-1}\delta_{2(i-1)} &= -\alpha_{i+1} \dots \alpha_{i-1}\delta_{2(i-1)-1}\delta_{2(i-1)} \\ &\quad -\delta_{2i-1}\delta_{2i}\delta_{2(i-1)-1}\delta_{2(i-1)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Denotemos por ρ al primer sumando de lado derecho de la igualdad, es decir,

$$\alpha_{i+1} \dots \alpha_{i-2}\alpha_{i-1}\delta_{2(i-1)-1}\delta_{2(i-1)}.$$

Note que ρ es un camino de longitud $n + 1$. Vamos a probar que ρ es un elemento del ideal Jacobiano.

Usando la derivada cíclica $\partial_{\delta_{2(i-1)}}(W)$, tenemos la siguiente identidad

$$\alpha_{i-1}\delta_{2(i-1)-1} = -\delta_{2(i-2)-1}\delta_{2(i-2)} \dots \delta_{2(i-1)-1}$$

.

Por tanto, reemplazando $\alpha_{i-1}\delta_{2(i-1)-1}$ en ρ , tenemos

$$\rho = -\alpha_{i+1} \dots \alpha_{i-2}\delta_{2(i-2)-1}\delta_{2(i-2)} \dots \delta_{2(i-1)-1}\delta_{2(i-1)}.$$

Observe que, en este caso, el camino ρ es de longitud $3n - 2$.

Reemplazando $\delta_{2(i-2)-1}\delta_{2(i-2)}$ por la relación inducida por $\partial_{\alpha_{i-2}}(W)$, tenemos que el camino ρ tiene longitud $4n - 3$. Iterando este proceso, tenemos que ρ pertenece a una cantidad numerable de R -bimódulos A^l . Por tanto, por Proposición 1.1.3, tenemos que la sucesión constante ρ converge al elemento cero.

Por tanto, la igualdad 3.7 se reescribe de la siguiente forma

$$\beta_{2i-1}\beta_{2i}\delta_{2(i-1)-1}\delta_{2(i-1)} = -\delta_{2i-1}\delta_{2i}\delta_{2(i-1)-1}\delta_{2(i-1)}$$

□

En el siguiente Lema enunciaremos otras igualdades necesarias para la demostración del resultado principal de esta sección.

Lema 3.3.4. *Las siguientes igualdades se satisfacen en $\mathcal{P}(Q, W)$.*

$$\alpha_i\delta_{2i-1}\delta_{2i} = \delta_{2(i-1)-1}\delta_{2(i-1)}\alpha_{i-1} \quad (3.8)$$

$$\alpha_i\alpha_{i+1}\delta_{2(i+1)-1} = \delta_{2(i-1)}\alpha_{i-1}\alpha_i = 0 \quad (3.9)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Demostración. Para probar la igualdad observemos que de las relaciones inducidas por $\partial_{\delta_{2i}}(W)$ y $\partial_{\delta_{2(i-1)-1}}(W)$, tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \alpha_i\delta_{2i-1}\delta_{2i} &= -(\delta_{2(i-1)-1}\delta_{2(i-1)} \cdots \delta_{2i-1})\delta_{2i} \\ &= \delta_{2(i-1)-1}(\delta_{2(i-1)}\alpha_{i-1}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para la segunda igualdad, notemos que

$$\partial_{\delta_{2(i+1)}}(W) = \alpha_{(i+1)}\delta_{2(i+1)-1} + \delta_{2(i)-1}\delta_{2i} \cdots \delta_{2(i+1)-1},$$

por tanto,

$$\alpha_i\alpha_{i+1}\delta_{2(i+1)-1} = -\alpha_i\delta_{2i-1}\delta_{2i} \cdots \delta_{2(i+1)-1}\delta_{2(i+1)}.$$

Sea ρ el término de la derecha de la igualdad anterior, es decir, $\alpha_i \delta_{2i-1} \delta_{2i} \dots \delta_{2(i+1)}$. Por la igualdad 3.4 del Lema 3.3.3 tenemos que ρ es igual a

$$\alpha_i \beta_{2(i)-1} \beta_{2i} \delta_{2(i-1)-1} \dots \delta_{2(i+1)},$$

y puesto que $\partial_{\beta_{2i}}(W) = \alpha_i \beta_{2i-1}$, se sigue que ρ es un elemento del ideal Jacobiano, y por tanto, $\alpha_i \alpha_{i+1} \delta_{2(i+1)-1} = 0$ en Λ . De manera similar se prueba que $\delta_{2(i-1)} \alpha_{i-1} \alpha_i = 0$ en Λ \square

Observación 3.3.5. Antes de demostrar el resultado principal de esta Sección vamos a resumir algunos caminos que son cero en Λ y nos resultaran de utilidad en la demostración de 3.3.1.

- (i) $\alpha_i \beta_{2i-1}$, pues $\partial_{\beta_{2i}}(W) = \alpha_i \beta_{2i-1}$,
- (ii) $\beta_{2i} \alpha_i$, pues $\partial_{\beta_{2i-1}}(W) = \beta_{2i} \alpha_i$,
- (iii) $\alpha_i \delta_{2i-1} \delta_{2i} \delta_{2(i-1)-1} \delta_{2(i-1)}$ (o $\delta_{2i-1} \delta_{2i} \delta_{2(i-1)-1} \delta_{2(i-1)} \alpha_{i-1}$), por Lemma 3.3.3 y los dos caminos anteriores,
- (iv) $\alpha_i \delta_{2i-1} \delta_{2i} \beta_{2(i-1)-1} \beta_{2(i-1)}$, por Lema 3.3.3 y los caminos (i) e (ii),
- (v) $\alpha_i \alpha_{i+1} \delta_{2(i+1)-1}$, por Lema 3.3.4
- (vi) $\delta_{2(i-1)} \alpha_{i-1} \alpha_i$, por Lema 3.3.4

Demostración del Teorema 3.3.1. Como mencionamos antes, la propiedad de que un álgebra Jacobiana sea de dimensión finita es invariante bajo mutaciones (ver [DWZ08, Corollary 6.6]) y el intercambio de arcos de una triangulación ideal es compatible con la mutación de carcaj con potenciales (cf. [LF09, Theorem 30]), es suficiente probar que el álgebra $\mathcal{P}(Q, W)$, del carcaj con potencial (Q, W) de la triangulación de la Figura 3.10, es de dimensión finita. Para ello, demostraremos que cualquier camino de longitud $2n + 4$ pertenece al ideal Jacobiano $J(W)$.

Sea ρ un camino no-cero de longitud al menos $2n + 4$. Supongamos que ρ es un camino que empieza en β_{2i-1} o δ_{2i-1} . Sin pérdida de generalidad podemos asumir que ρ empieza en δ_{2n-1} o β_{2n-1} . Primero analizaremos como son los caminos de longitud 4 que pueden aparecer como factores en ρ y que empiecen en β_{2i-1} o en δ_{2i-1} . En el primer caso, notemos que si el camino empieza en β_{2i-1} tiene necesariamente el factor $\beta_{2i-1} \beta_{2i}$ y por la Observación 3.3.5, sabemos que no puede tener el factor $\beta_{2i} \alpha_i$, pues en caso contrario, el camino ya es cero, por tanto tenemos dos opciones:

$$(I) \beta_{2i-1}\beta_{2i}\delta_{2(i-1)-1}\delta_{2(i-1)} \circ$$

$$(II) \beta_{2i-1}\beta_{2i}\beta_{2(i-1)-1}\beta_{2(i-1)}$$

Con un razonamiento similar, los caminos de longitud 4 que empiecen en δ_{2i-1} , son:

$$(III) \delta_{2i-1}\delta_{2i}\delta_{2(i-1)-1}\delta_{2(i-1)}$$

$$(IV) \delta_{2i-1}\delta_{2i}\beta_{2(i-1)-1}\beta_{2(i-1)}$$

$$(V) \delta_{2i-1}\delta_{2i}\alpha_{2i}\delta_{2i-1}$$

Ahora, analicemos los caminos de longitud 5 que pueden aparecer en ρ . Por el Lema 3.3.3 los caminos del (I) al (IV) son iguales salvo un signo positivo o negativo, por tanto las únicas flechas que puede hacer un camino de longitud 5 y que tengan algún factor del tipo (I) al (IV) son $\delta_{2(i-2)-1}$ o $\beta_{2(i-2)-1}$ para que el camino no sea cero. Para el camino de longitud 5 que empieza con el camino del tipo (V) sólo puede completarse con la flecha δ_{2i} , en cuyo caso tenemos el camino

$$\delta_{2i-1}\delta_{2i}\alpha_{2i}\delta_{2i-1}\delta_{2i},$$

que por el Lemma 3.3.4 es igual al camino

$$\delta_{2i-1}\delta_{2i}\delta_{2(i-1)-1}\delta_{2(i-1)}\alpha_{i-1},$$

que por el Lema 3.3.3 ya es un camino cero. Por tanto podemos asumir que

$$\rho = \pm\delta_{2n-1}\delta_{2n}\dots\delta_1\delta_2\delta_{2n-1}\delta_{2n}\rho'$$

para algún camino ρ' de longitud al menos 4.

Utilizando las derivación cíclica

$$\partial_{\delta_2}(W) = \delta_{2n-1}\delta_{2n}\dots\delta_1 + \alpha_1\delta_1,$$

tenemos

$$\rho = -x\alpha_1\delta_1\delta_2\delta_{2n-1}\delta_{2n}\rho'.$$

que por la Observación 3.3.5, es cero en $\mathcal{P}(Q, W)$.

Ahora analicemos el caso en que ρ empieza en un α_i . Nuevamente sin pérdida de generalidad podemos asumir que ρ empieza en α_1 . Primero enlistaremos los posibles factores que

pueden aparecer en ρ , teniendo en cuenta la Observación 3.3.5, por tanto tenemos las siguientes posibilidades:

- $\alpha_i \alpha_{i+1} \alpha_{i+2} \alpha_{i+3}$
- $\alpha_i \delta_{2i-1} \delta_{2i} \alpha_i$

Notemos que la segunda posibilidad es igual a $\delta_{2(i-1)-1} \delta_{2(i-1)} \alpha_{i-1} \alpha_i = 0$ por Lema 3.3.4. Por tanto ρ , en este caso sólo puede ser el camino

$$\alpha_1 \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_1 \dots \alpha_k$$

para algún $k \geq 4$

Finalmente, usando la relación inducida por

$$\partial_{\alpha_1}(W) = \alpha_2 \dots \alpha_n + \beta_1 \beta_2 + \delta_1 \delta_2$$

y el hecho que $\alpha_1 \beta_1 = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \rho &= \alpha_1 (-\beta_1 \beta_2 - \delta_1 \delta_2) \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_1 \dots \alpha_k \\ &= -\alpha_1 \delta_1 \delta_2 \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \end{aligned}$$

que es un camino cero, pues tiene el factor $\delta_2 \alpha_1 \alpha_2$ ya es cero en Λ . □

Capítulo 4

Superficies cerradas con puntos marcados

En este capítulo presentamos los resultados principales de la tesis. Estudiamos la categoría de módulos de un álgebra Jacobiana de una superficie cerrada con puntos marcados y como consecuencia de los resultados obtenemos que este tipo de álgebras forman parte de una nueva familia de álgebras con categoría de módulos periódica, mansas y simétricas. En la primera sección presentamos un pequeño resumen de las definiciones y resultados sobre éste tipo de álgebras. En las siguientes secciones damos y probamos los nuevo resultados.

4.1. Álgebras con categorías de módulos periódicas

Las álgebras con categorías de módulos periódicas resultan de gran interés para nosotros por tanto, en esta primera sección daremos un breve resumen de dicho tipo de álgebras. Empezaremos por definir álgebras simétricas y débilmente simétricas, así como también daremos algunos ejemplos de este tipo de álgebras. Recordemos que la definición de álgebra auto-inyectiva está en el Capítulo 2, Sección 2.3.

Definición 4.1.1. Sea Λ una k -álgebra.

- El álgebra Λ es *simétrica* si Λ y $D\Lambda = \text{Hom}_k(\Lambda, k)$ son isomorfas como Λ - Λ -bimódulos.
- El álgebra Λ es *débilmente simétrica* si $\text{Soc}(P(S)) \cong S$ para todo Λ -módulo simple S .

En el siguiente teorema se dan condiciones equivalentes para que un álgebra de dimensión finita sea un álgebra simétrica, dicho teorema se debe a Brauer, Nesbitt y Nakayama y se conoce como el segundo Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama. El primer Teorema de Brauer-Nesbitt-Nakayama da criterios para que un álgebra de dimensión finita sea un álgebra Frobenius (ver por ejemplo [SY11] para un estudio detallado de álgebras Frobenius).

Teorema 4.1.2. [SY11, Teorema 2.2, Capítulo IV] *Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo k . Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) Λ es un álgebra simétrica.

(ii) Existe una forma k -bilineal asociativa no-degenerada

$$(-, -) : \Lambda \times \Lambda \longrightarrow k.$$

(iii) Existe una forma k -lineal $\varphi : \Lambda \longrightarrow k$ tal que $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ para todo $a, b \in \Lambda$ y el núcleo $\ker \varphi$ no contiene un ideal de Λ no-cero.

(iv) Sean $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ una base para el k -espacio vectorial Λ y $\alpha_{ijk} \in k$, con $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, las constantes de estructuras asociada de Λ , es decir,

$$a_j a_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ijk} a_i.$$

Consideremos $P_h = [P_h]_{ij} = [\alpha_{hij}]_{ij}$ una matriz cuadrada con coeficientes en el cuerpo.

Entonces, existe una n -dupla $c = (c_1, \dots, c_n)$ de elementos del cuerpo tal que $P(c) = \sum_{h=1}^n c_h P_h$ es una matriz simétrica.

La equivalencia de las condiciones (iv) y (iii) fueron probadas por Brauer y Nesbitt en [Nes38]. La equivalencia (iv) si y sólo si (ii) fue observada por Nakayama en [Nak39]. Finalmente, la equivalencia (ii) y (i) fue probada por Nakayama en [Nak41]

El siguiente teorema, dado por Nakayama en [Nak41], da una equivalencia para álgebras auto-inyectivas de dimensión finita.

Teorema 4.1.3. *Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita con n_Λ elementos idempotentes básicos y primitivos. Entonces Λ es un álgebra auto-inyectiva si y sólo si existe una permutación ν*

del conjunto $\{1, \dots, n_\Lambda\}$ tal que

$$\text{top}(e_i\Lambda) \cong \text{soc}(e_{v(i)}\Lambda)$$

en mód Λ , para todo $i \in \{1, \dots, n_\Lambda\}$.

Definición 4.1.4. Dada una k -álgebra Λ de dimensión finita con n_Λ elementos idempotentes básicos y primitivos, la permutación v del conjunto $\{1, \dots, n_\Lambda\}$ tal que $\text{top}(e_i\Lambda) \cong \text{soc}(e_{v(i)}\Lambda)$ en mód Λ , para todo $i \in \{1, \dots, n_\Lambda\}$, es llamada *permutación de Nakayama* o *función de Nakayama* de Λ

Ejemplo 4.1.5. En este ejemplo veremos varios casos de álgebras simétricas o auto-inyectivas. Observemos que por definición la clase de álgebras auto-inyectivas incluye a las álgebras simétricas.

- El álgebra de un grupo finito es un álgebra simétrica. Para probar esta afirmación utilizaremos la condición (iii) del Teorema 4.1.2. Notemos que podemos escribir al álgebra Λ como kG , donde G es un grupo finito. Sea $e \in G$ el elemento neutro del grupo G y consideremos la forma lineal $\varphi : kG \rightarrow k$ dada por

$$\varphi(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = e \\ 0 & \text{si } g \neq e. \end{cases}$$

Veamos que $\ker \varphi$ no contiene ningún ideal a izquierda no cero. En efecto, supongamos que $x = \sum_{g \in G} \alpha_g g$ es un elemento de $\ker \varphi$ no nulo, entonces existe un $\alpha_{g_0} \neq 0$ para algún $g_0 \in G$. Consideremos el elemento $g_0^{-1}x$, observemos que $\varphi(g_0^{-1}x) \neq 0$, pues en caso contrario $\alpha_{g_0} = 0$, por tanto $\ker \varphi$ no contiene ningún ideal a izquierda no cero.

Por otro lado, es fácil ver que $\varphi(gh) = \varphi(hg)$ para todo $g, h \in G$.

- Sea Λ una k -álgebra. La extensión trivial $T(\Lambda)$ de Λ por $D(\Lambda)$, que es por definición $T(\Lambda) = \Lambda \oplus D(\Lambda)$ como k -espacio vectorial y la multiplicación en $T(\Lambda)$ es definida por $(a, f)(b, g) = (ab, ag + fb)$ para $a, b \in \Lambda$ y $f, g \in D(\Lambda)$. Dicha álgebra es simétrica. Utilizaremos la condición (ii) del Teorema 4.1.2 para verificar esta afirmación.

Es fácil ver que la forma k -bilineal

$$(-, -) : T(\Lambda) \times T(\Lambda) \rightarrow k$$

dada por

$$((a, f), (b, g)) = f(b) + g(a)$$

para $a, b \in \Lambda$ y $f, g \in D(\Lambda)$, es asociativa y simétrica. Veamos que $(-, -)$ es no-degenerada. Consideremos un elemento $(a, f) \in T(\Lambda)$ tal que $((a, f), -) = 0$, entonces para cualquier elemento $b \in \Lambda$ y $0 = g \in D(\Lambda)$ tenemos que

$$0 = ((a, f), (b, g)) = f(b) + g(a) = f(b),$$

es decir, que la función $f = 0$. Por otro lado, para todo elemento $g \in D(\Lambda)$, tenemos $0 = ((a, 0), (0, g)) = g(a)$, por tanto $a = 0$ y $(a, f) = (0, 0)$ y en consecuencia $(-, -)$ es no-degenerada. Luego, por la condición (ii) del Teorema 4.1.2, el álgebra $T(\Lambda)$ es simétrica.

Esto demuestra, además, que toda álgebra Λ es un factor de un álgebra simétrica.

- Consideremos el carcaj Q de la Figura 4.1.

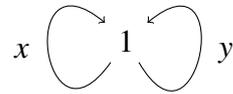


Figura 4.1: Carcaj Q

El álgebra de caminos $\Lambda_\lambda = k\langle Q \rangle / I_\lambda$, donde I_λ es el ideal generado por las relaciones x^2, y^2 y $xy - \lambda yx$, es un álgebra 4-dimensional con base $\{1_{\Lambda_\lambda}, x, y, xy\}$. Consideremos la transformación k -lineal

$$\varphi_\lambda : \Lambda_\lambda \longrightarrow k$$

tal que $\varphi_\lambda(1) = 0$, $\varphi_\lambda(x) = 0$, $\varphi_\lambda(y) = 0$ y $\varphi_\lambda(xy) = 1$. De manera similar al ejemplo del álgebra de un grupo finito se puede probar que $\ker \varphi_\lambda$ no contiene un ideal a izquierda no cero. Por otro lado, observemos que

$$\varphi_\lambda(xy) = \varphi_\lambda(\lambda yx) = \lambda \varphi_\lambda(yx),$$

es decir, que $\varphi_\lambda(xy) = \varphi(yx)$ si y sólo si $\lambda = 1$. Luego, por la condición (iii) del Teorema 4.1.2, el álgebra Λ_λ es simétrica si y sólo si $\lambda = 1$. En cualquier otro caso Λ_λ es un álgebra débilmente simétrica.

Es fácil ver que si Λ es un álgebra auto-inyectiva, entonces el álgebra opuesta Λ^{op} también lo es, y se tiene una dualidad entre $\text{mód } \Lambda$ y $\text{mód } \Lambda^{\text{op}}$ dada por

$$\text{mód } \Lambda \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda_\Lambda)} \\ \xleftarrow{\text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda_\Lambda)} \end{array} \text{mód } \Lambda^{\text{op}}$$

La auto-equivalencia

$$v_\Lambda = D\text{Hom}_\Lambda(-, \Lambda_\Lambda) : \text{mód } \Lambda \longrightarrow \text{mód } \Lambda$$

es llamada el *functor de Nakayama*. Su inversa está dada por

$$v_\Lambda^{-1} = \text{Hom}_{\Lambda^{\text{op}}}(-, \Lambda)D : \text{mód } \Lambda \longrightarrow \text{mód } \Lambda.$$

Sea Λ un álgebra. Dado un módulo M en $\text{mód } \Lambda$, tenemos dos sucesiones exactas canónicas

$$0 \longrightarrow \Omega_\Lambda(M) \longrightarrow P_\Lambda(M) \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\omega} I_\Lambda(M) \longrightarrow \Omega_\Lambda^{-1}(M) \longrightarrow 0$$

donde $\pi : P_\Lambda(M) \longrightarrow M$ es la cubierta proyectiva de M y $\omega : M \longrightarrow I_\Lambda(M)$ es la cápsula inyectiva de M en $\text{mód } \Lambda$. Para las álgebras auto-inyectivas, los operadores Ω_Λ y Ω_Λ^{-1} inducen dos funtores mutuamente inversos

$$\Omega_\Lambda, \Omega_\Lambda^{-1} : \underline{\text{mód}} \Lambda \longrightarrow \underline{\text{mód}} \Lambda$$

llamados *funtores sizigia¹ de Heller* (ver [Hel59]).

El siguiente teorema relaciona los funtores sizigias de Heller, el functor de Auslander-Reiten y el functor de Nakayama en álgebras de dimensión finita auto-inyectivas.

Teorema 4.1.6. [SY11, Teorema 8.5, Capítulo IV] *Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita auto-inyectiva. Entonces se cumple lo siguiente.*

¹En astronomía, una sizigia es una situación en la que tres objetos celestes, o más, están alineados. Es un término generalmente utilizado para la alineación del Sol, la Tierra y la Luna o de un planeta

- (i) Los funtores $\tau_\Lambda, \Omega_\Lambda^2 v_\Lambda$ y $v_\Lambda \Omega_\Lambda^2$ de $\underline{\text{mód}} \Lambda$ en $\underline{\text{mód}} \Lambda$ son naturalmente isomorfos.
- (ii) Los funtores $\tau_\Lambda^{-1}, \Omega_\Lambda^{-2} v_\Lambda^{-1}$ y $v_\Lambda^{-1} \Omega_\Lambda^{-2}$ de $\underline{\text{mód}} \Lambda$ en $\underline{\text{mód}} \Lambda$ son naturalmente isomorfos.

Como corolario del teorema anterior tenemos el siguiente resultado para álgebras simétricas.

Corolario 4.1.7. [SY11, Corolario 8.6, Capítulo IV] Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita simétrica. Entonces

- (i) $v_\Lambda \cong \mathbb{1}_{\text{mód } \Lambda}$ como funtores de $\text{mód } \Lambda$ en $\text{mód } \Lambda$.
- (ii) $\tau \cong \Omega_\Lambda^2$ y $\tau_\Lambda^{-1} \cong \Omega_\Lambda^{-2}$ como funtores de $\underline{\text{mód}} \Lambda$ en $\underline{\text{mód}} \Lambda$.

Definición 4.1.8. Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita.

- Un módulo M en $\text{mód } \Lambda$ es *periódico* si $\Omega_\Lambda^n(M) \cong M$ para algún $n \geq 1$.
- Un módulo M en $\text{mód } \Lambda$ es τ_Λ -*periódico* si $\tau_\Lambda^n(M) \cong M$ para algún $n \geq 1$.

Decimos que el módulo M tiene *periodo* (τ_Λ -*periodo*) d si $d \geq 1$ es el menor entero con la propiedad $\Omega_\Lambda^d(M) \cong M$ (resp. $\tau_\Lambda^d(M) \cong M$).

Más generalmente, la categoría de módulos $\text{mód } \Lambda$ es *periódica* (τ_Λ -*periódica*) si todo módulo indescomponible no proyectivo en $\text{mód } \Lambda$ es periódico (resp. τ_Λ -periódico).

A continuación presentamos tres familias de álgebras auto-inyectivas (simétricas) y con categoría de módulos periódica. Además, enunciaremos resultados conocidos que nos permiten mostrar que las álgebras Jacobianas de superficies cerradas no pertenecen a ninguna de estas familias. Empezaremos recordando algunas definiciones.

Definición 4.1.9. Sea álgebra B una k -álgebra.

- El *álgebra repetitiva* \widehat{B} de B es por definición

$$\widehat{B} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (B_i \oplus D(B)_i)$$

donde $B_i = B$, $D(B)_i = D(B)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ y la multiplicación en \widehat{B} está definida por

$$(a_i, f_i)_i \cdot (b_i, g_i)_i = (a_i b_i, a_i g_i + f_i b_{i-1})_i$$

para $a_i, b_i \in B_i$ y $f_i, g_i \in D(B)_i$.

- Sea $\mathcal{E} = \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ un conjunto fijo de idempotentes primitivos y ortogonales de B tal que $1_B = e_1 + \cdots + e_n$. El conjunto $\widehat{\mathcal{E}} = \{e_{j,i} \mid 1 \leq j \leq n, i \in \mathbb{Z}\}$ es el *conjunto canónico de idempotentes primitivos y ortogonales* de \widehat{B} tal que $1_{B_i} = e_{1,i} + \cdots + e_{n,i}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.
- Sea $\varphi : \widehat{B} \rightarrow \widehat{B}$ una función. Decimos que φ es un *automorfismo de \widehat{B}* si es un automorfismo de \widehat{B} de k -álgebras que deja fijo el conjunto $\widehat{\mathcal{E}}$.
- Un grupo G de automorfismos de \widehat{B} es *admisibile* si induce una acción libre de G en $\widehat{\mathcal{E}}$ con una cantidad finita de órbitas.

Dada un álgebras auto-inyectiva Λ , Nakayama probó en [Nak39], que el zócalo a izquierda $\text{soc}({}_\Lambda \Lambda)$ de Λ y el zócalo a derecha $\text{soc}(\Lambda_\Lambda)$ coinciden, por tanto $\text{soc}(\Lambda) := \text{soc}({}_\Lambda \Lambda) = \text{soc}(\Lambda_\Lambda)$ es un ideal de Λ .

- Definición 4.1.10.** ■ Sean Λ y Λ' álgebras auto-inyectivas. Decimos que Λ y Λ' son *zócalo equivalentes* si las álgebras cocientes $\Lambda/\text{soc}(\Lambda)$ y $\Lambda'/\text{soc}(\Lambda')$ son isomorfas.
- Un álgebra Λ es *auto-inyectiva de tipo Dynkin Δ* si es isomorfa a una álgebra auto-inyectiva de órbitas \widehat{B}/G , donde B es un álgebra inclinada de tipo Dynkin Δ .

Teorema 4.1.11. [Rie80, Rie83] *Sea Λ una k -álgebra básica, indescomponible, auto-inyectiva y no simple. Son equivalentes.*

- (1) Λ es de tipo de representación finita
- (2) Λ es zócalo equivalente a un álgebra auto-inyectiva $\overline{\Lambda}$ de tipo Dynkin.

Definición 4.1.12. Sea C un álgebra tubular canónica $C(2, 2, 2, 2)$, $C(3, 3, 3)$, $C(2, 4, 4)$ o $C(2, 3, 6)$. Sea Γ_C el carcaj de Auslander-Reiten de C . Denotemos por \mathcal{P}^C a la familia de componentes de Γ_C que contienen todos los C -módulos indescomponibles proyectivos, por \mathcal{Q}^C a la familia de componentes que contienen los C -módulos indescomponibles inyectivos, y por \mathcal{T}^C a la familia $\{T_\lambda^C\}_{\lambda \in \mathbb{P}_1(k)}$ de tubos estables que contienen todos los C -módulos simples que no son ni proyectivos ni inyectivos (ver [Rin84, Capítulo 5] para teoría de representaciones de álgebras tubulares)

- Un *álgebra tubular* es un álgebra de endomorfismos $B = \text{End}_C(T)$, donde T es un C -módulo inclinante de la categoría aditiva $\text{add}(\mathcal{P}^C \cup \mathcal{T}^C)$.
- Un álgebra Λ es un *álgebra auto-inyectiva de tipo tubular* si Λ es auto-inyectiva y es isomorfa a un álgebra de órbitas \hat{B}/G , donde B es un álgebra tubular.

En 1973 Nazarova y Roiter en [NR73] prueban la conjetura de Brauer-Thrall para álgebras de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Es decir, prueban que un álgebra de ese tipo satisface sólo una de las siguientes condiciones:

- (1) tiene un número finito de módulos indescomponibles no-isomorfas;
- (2) o el número de módulos indescomponibles es estrictamente no acotado, es decir, para cada dimensión d hay una cantidad infinita de módulos indescomponibles d -dimensionales no isomorfos dos a dos.

Varios ejemplos mostraban que la segunda clase de álgebras se descomponía en dos familias disjuntas: la familia “mansa” cuyos módulos se pueden parametrizar y la familia “salvaje” en la cual la clasificación de sus módulos incluye el problema no resuelto sobre la forma canónica de pares de matrices con respecto a la conjugación.

En el mismo año, Freislich y Donovan en [DF73], dan una definición explícita de los términos *mansa* y *salvaje* y conjeturan que cualquier álgebra de tipo de representación infinita es mansa o salvaje. En 1980, Drozd en [Dro80], prueba que la conjetura de Freislich y Donovan es cierta.

La siguiente definición de álgebra mansa no es la dada en [DF73], sin embargo, es equivalente y en el contexto que la utilizamos es más conveniente.

Definición 4.1.13. Un álgebra Λ es *mansa* si para toda dimensión $d \in \mathbb{N}$ existe un número finito de Λ - $k[X]$ -bimódulos $N_1, \dots, N_{i(d)}$ tal que N_i es libremente y finitamente generado sobre el anillo de polinomios $k[X]$ y casi todos los A -módulos d -dimensionales son isomorfos a $N_i \otimes_{k[X]} k[X]/(X - \lambda)$ para algún $i \in \{1, \dots, i(d)\}$ y algún $\lambda \in k$.

Dentro de la clase de álgebras mansas podemos dar información sobre la complejidad de la categoría de módulos a través del tipo de crecimiento, que en grado de complejidad, es doméstica, polinomial y exponencial. A continuación daremos la definición de estos tipos.

Definición 4.1.14. Sean A un álgebra de tipo de representación mansa y $\mu_\Lambda(d)$ el menor número de $\Lambda - k[X]$ -bimódulos de dimensión d como en la definición anterior. Decimos que

- Λ es un *álgebra doméstica* si existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_\Lambda(d) \leq m$ para toda $d \in \mathbb{N}$.
- Λ es de *crecimiento polinomial* si existe un número natural m tal que $\mu_\Lambda(d) \leq d^m$ para todo $d \geq 2$.
- Λ es de *crecimiento exponencial* si existe un $r \in \mathbb{R}$ con $r > 1$ tal que $\mu_\Lambda(d) > r^d$ para una cantidad infinita de $d \in \mathbb{N}$.

Los ejemplos típicos de álgebras domésticas son las álgebras hereditarias mansas. Mientras que los de álgebras de crecimiento polinomial son las álgebras de tipo tubular. El siguiente teorema da una clasificación de las álgebras auto-inyectivas de tipo tubular.

Teorema 4.1.15. [Sko06, BS02, Białkowski-Skowroński, Skowroński] Sea A un álgebra básica indescomponibles y auto-inyectiva de tipo de representación infinita. Son equivalentes.

- (1) Λ es un álgebra de crecimiento polinomial y $\text{mód } \Lambda$ es periódica
- (2) Λ es zócalo equivalente a un álgebra auto-inyectiva $\bar{\Lambda}$ de tipo tubular.

Finalmente, definimos la última familia simétrica y con categoría de módulos periódica. Para definir esta familia tenemos que recordar la definición de matriz de Cartan.

Definición 4.1.16. ■ Sea I un conjunto finito. Una *matriz de Cartan* es una matriz $C = [C_{ij}]_{i,j \in I}$ con coeficientes enteros que satisfacen:

- (1) $C_{i,i} = 2$ para todo $i \in I$;
- (2) $C_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$ en I ;
- (3) $C_{ij} = 0$ si y sólo si $C_{ji} = 0$, para $i, j \in I$.

- Sea $\Lambda = k\langle Q \rangle / I$ una k -álgebra de dimensión finita. La *matriz de Cartan* C_Λ de Λ es una matriz cuadrada de $|Q_0| \times |Q_0|$ con coeficientes enteros tal que $[C_\Lambda]_{ij}$ es la dimensión de los k -espacios vectoriales de caminos de Λ que empiezan en i y terminan en j .

Ahora definiremos la última familia que nos interesa.

Definición 4.1.17. Sea Λ una k -álgebra de dimensión finita.

- El álgebra Λ es de *tipo quaternion* si satisface las siguientes condiciones:
 - El álgebra Λ es simétrica, indescomponible, mansa y de tipo de representación infinita.
 - Los módulos indescomponibles no proyectivos de mód Λ son periódicos de periodo divisor de 4.
 - La matriz de Cartan de Λ es no-singular.
- El álgebra Λ es de *tipo quaternion puro* si es de tipo quaternion y es crecimiento exponencial.

Si bien hay una clasificación de las álgebras tipo quaternion y tipo quaternion puro resultado de trabajos de Erdmann y Skowroński (ver [ES06, Erd88b, Erd88a, Erd90]), dicha clasificación no la mostraremos en este trabajo, en cambio; daremos un resultado que da una cota superior de la cantidad de simples que puede tener un álgebra de tipo quaternion.

Teorema 4.1.18. [Erd88b, Teorema] *Supongamos que Λ es un álgebra de tipo quaternion. Entonces Λ tiene a lo más tres módulos simples.*

Observación 4.1.19. Observemos que las tres familias que hemos descrito en esta sección: álgebras zócalo equivalentes a álgebras auto-inyectivas de tipo Dynkin, álgebras zócalo equivalentes a álgebras auto-inyectivas de tipo tubular y las álgebras tipo quaternion puro son todas mansas. Por ello, las álgebras de estas tres familias son auto-inyectivas, mansas y con categoría de módulos periódica.

4.2. Resultados principales y consecuencias

El resultado principal de este capítulo lo presentamos en esta sección. Además, damos algunas consecuencias de éstos resultados así como también algunos comentarios relacionados a ellos. Empezamos dando algunos resultados conocidos de las álgebras Jacobianas de superficies.

Teorema 4.2.1. [GLFS] *Sea $\mathcal{P}(Q, W)$ un álgebra Jacobiana proveniente de una triangulación de una superficie con puntos marcados. Entonces $\mathcal{P}(Q, W)$ es mansa*

La prueba del Teorema 4.2.1 es necesario utilizar el siguiente teorema de Crawley-Boevey que es una versión más general que el Teorema de Geiss [Gei95].

Teorema 4.2.2. [CB95, Teorema B] Sean Λ un álgebra de dimensión finita, X una variedad irreducible y $f_1, \dots, f_r : X \rightarrow \Lambda$ morfismos de variedades (donde Λ tiene una estructura natural como espacio afín). Para cada $x \in X$, escribimos $\Lambda_x = \Lambda / (\{f_i(x) \mid i = 1, \dots, r\})$. Sean $x_0, x_1 \in X$ tales que :

- (i) Λ_{x_0} es mansa;
- (ii) $\Lambda_x \cong \Lambda_{x_1}$ para todo x en un conjunto abierto y no vacío de X .

Entonces Λ_{x_1} es mansa.

Existen varias nociones de *deformaciones de álgebras*. En esta tesis diremos que un álgebra Λ' es una *deformación* de un álgebra Λ si en la situación del Teorema 4.2.2 tenemos que $\Lambda \cong \Lambda_{x_0}$ y $\Lambda' \cong \Lambda_{x_1}$.

La prueba del Teorema 4.2.1 consiste en probar que la mutación de carcaj con potenciales preserva el tipo de representación y que en el caso de las álgebras Jacobianas de superficies es posible encontrar una triangulación \mathbb{T} de cada superficie (S, M) tal que $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ se puede degenerar a un álgebra mansa. La técnica de degeneración no nos da información sobre el tipo de crecimiento del álgebra.

Teorema 4.2.3. [Ladc, Proposición 4.7, Corolario 4.9][HI11] Sea (S, \mathbb{M}) una superficie cerrada con puntos marcados. Toda álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q, W)$ de una triangulación etiquetada de (S, \mathbb{M}) es débilmente-simétrica. Más aún, existe una triangulación \mathbb{T} de (S, \mathbb{M}) tal que el álgebra $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ es simétrica y con matriz de Cartan singular.

Ladkani probó en [Ladc, Proposición 4.7], que toda superficie con frontera vacía con puncciones tiene una triangulación \mathbb{T} , que no tiene triángulos auto-pegados, cuya álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ es simétrica (y en particular de dimensión finita). De este hecho se sigue que toda triangulación \mathbb{T}' de una superficie cerrada (S, \mathbb{M}) el álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}'), W(\mathbb{T}'))$ es débilmente simétrica por [HI11]. Además, Ladkani en [Ladc] anunció tener una prueba de un resultado más general que el Teorema 4.2.3, en el cual se afirma que las álgebras Jacobianas de

triangulaciones de una superficie cerrada con puntos marcados son derivadamente equivalentes, y por tanto todas las álgebras Jacobianas de una superficie cerrada son simétricas.

Enunciaremos a continuación los resultados principales de éste capítulo y sus consecuencias. Luego presentaremos las pruebas de los mismos.

Teorema 4.2.4. *Sea S una superficie cerrada de Riemann con un conjunto finito no vacío P de punciones, excluyendo sólo la esfera con 4 (o menos) punciones. Para una triangulación arbitraria etiquetada \mathbb{T} , el álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ es simétrica, de crecimiento exponencial y su carcaj de Auslander-Reiten estable consiste sólo de tubos estables de rango 1 o 2.*

Un resultado similar al Teorema 4.2.4 se conoce para la esfera con 4 punciones, excepto que el potencial depende, además, de la elección de un parámetro $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$. En éste caso, el álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}, \lambda))$ es (débilmente) simétrica de tipo tubular $(2, 2, 2, 2)$ y es de crecimiento polinomial, mas aún es de crecimiento lineal. Y la categoría $\mathcal{C}_{(Q, W, \lambda)}$ es una categoría de conglomerado tubular de tipo $(2, 2, 2, 2)$, ver [GGS] y [BG12].

En cuando a la categoría de conglomerado de una superficie (posiblemente con frontera vacía) sabemos, por Amiot[Ami, Sección 3.4] y Labardini-Fragoso [LFa, Teorema 4.2], que existe una categoría triangulada 2-Calabi-Yau y Hom-finita $\mathcal{C}_{(S, \mathbb{M})}$ con una familia de objetos inclinantes de conglomerado $(T_{\mathbb{T}})_{\mathbb{T}}$ triangulación de (S, \mathbb{M}) , que están relacionados por la mutación de Iyama-Yoshino y tal que $\text{End}_{\mathcal{C}_{(S, \mathbb{M})}}(T_{\mathbb{T}}) \cong \mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))^{\text{op}}$. Del Teorema 4.2.4 se sigue el siguiente resultado.

Corolario 4.2.5. *Sea S una superficie cerrada de Riemann con un conjunto finito P de punciones, excluyendo sólo el caso de la esfera con 4 (o menos) punciones. El carcaj de Auslander-Reiten de la categoría generalizada de conglomerado $\mathcal{C}_{(S, \mathbb{M})}$ consiste sólo de tubos estables de rango 1 o 2.*

Estos resultados fueron presentados en el Advances in Representation Theory of Algebras (ARTA) 2013 y 2014. En el ARTA 2013 Ladkani anunció parte de los resultados del Teorema 4.2.4 y el Corolario 4.4.1 (ver [Ladb]). Recientemente ha publicado de manera electrónica una versión preliminar con dichos resultados (ver [Lada]).

Como mencionamos en la Sección 4.1, hasta el momento, se conocían tres familias de álgebras mansas, simétricas y con categorías de módulos periódicas. Como consecuencia del

Teorema 4.2.4 y el Teorema 4.2.1 tenemos el siguiente corolario, que implica la existencia de una nueva familia de éste tipo de álgebras.

Corolario 4.2.6. *Sea S una superficie cerrada de Riemann con un conjunto finito M de punciones, excluyendo sólo el caso de la esfera con 4 punciones. Toda álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q, W)$ de una triangulación etiquetada de (S, \mathbb{M}) no es isomorfa a una de los siguientes tipos de álgebras:*

- *un álgebra zócalo equivalente a un álgebra simétrica de tipo Dynkin;*
- *un álgebra zócalo equivalente a un álgebra simétrica de tipo tubular;*
- *un álgebra de tipo quaternion puro.*

Demostración. Sea $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ un álgebra Jacobiana asociada a una triangulación \mathbb{T} de una superficie cerrada con puntos marcados (S, \mathbb{M}) , donde (S, \mathbb{M}) no es una esfera con 4 punciones. Denotemos por Λ a el álgebra $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$.

Veamos que Λ no es un álgebra zócalo equivalente a un álgebra simétrica de tipo Dynkin. Por el Teorema 4.1.11 de caracterización de Riedtmann sabemos que las álgebras zócalo equivalente a un álgebra auto-inyectiva de tipo Dynkin son de tipo de representación finita, mientras que Λ es de tipo de representación infinita mansa por [GLFS].

Además, Λ no es zócalo equivalente a un álgebra tubular, pues por el Teorema 4.1.15 sabemos que éste tipo de álgebras son de crecimiento polinomial y Λ es de crecimiento exponencial por Teorema 4.2.4.

Finalmente, para mostrar que Λ no es un álgebra de tipo quaternion puro tenemos que analizar dos casos: el toro con una punción y las otras superficies con puntos marcados.

Analicemos primero el caso del toro. Por Teorema 4.2.3, sabemos que la matriz de Cartan del álgebra Jacobiana del toro con una punción es singular, pero la matriz de Cartan de un álgebras de tipo quaternion puro por definición es no-singular.

Consideremos ahora (S, \mathbb{M}) una superficie con puntos marcados que no es el toro con una punción. Sea p la cardinalidad de \mathbb{M} y g el género de S . Sabemos que Λ tiene exactamente $6(g - 1) + 3p$ módulos simples, por tanto tiene al menos 6 módulos simples. Por otro lado, Erdmann prueba en el Teorema principal de [Erd88b, Teorema]) que las álgebras de bloque de tipo quaternion tienen a lo más 3 módulos simples, por tanto Λ no es de tipo quaternion puro. \square

4.3. Álgebras 2-Calabi-Yau inclinadas simétricas

En esta sección se presentarán varios resultados sobre álgebras 2-Calabi-Yau inclinadas simétricas, que resultan de utilidad para probar los resultados principales.

El siguiente Lema caracteriza a las álgebras auto-inyectivas 2-Calabi-Yau inclinadas. Este Lema fue demostrado por Ringel en [Rin08, Lema].

Lema 4.3.1. *Sean T un objeto inclinante de conglomerado en una categoría \mathcal{C} Hom-finita y 2-CY, \mathbb{S} el funtor de Serre de \mathcal{C} y $\tau_{\mathcal{C}}$ el trasladado de Auslander-Reiten de \mathcal{C} . El álgebra de endomorfismos $End_{\mathcal{C}}(T) = \Lambda$ es auto-inyectiva si y sólo si $\tau_{\mathcal{C}}^2(T)$ es isomorfo a T .*

Demostración. Como T es un objeto inclinante de conglomerado existen objetos T_1, \dots, T_n indescomponibles tales que $T = \bigoplus_{i=1}^n T_i$. Por la equivalencia $\mathcal{C}/(\text{add}(\Sigma T)) \xrightarrow{F} \text{mod}\Lambda$ dada en [KR07, Proposición 2.1], sabemos que $\text{mod}(\Lambda)$ es una categoría cociente de \mathcal{C} módulo el ideal generado por los objetos $\tau_{\mathcal{C}} T_i$. En esta categoría cociente los objetos T_i son los proyectivos indescomponibles y los objetos $\tau_{\mathcal{C}}^2 T_i$ son los inyectivos indescomponibles. Puesto que Λ es auto-inyectiva tenemos que todo Λ -módulo inyectivo es proyectivo, esto significa que cualquier $\tau_{\mathcal{C}}^2 T_i$ es isomorfo a algún T_j , por lo tanto $\tau_{\mathcal{C}}^2(T)$ es isomorfo a T . \square

Definición 4.3.2. [Hap88] Sea \mathcal{A} una k -categoría triangulada, Hom-finita y Krull-Schmidt. Un triángulo $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$ es un *triángulo de Auslander-Reiten* si cumple las siguientes condiciones:

(AR1) A y C son indescomponibles.

(AR2) $h \neq 0$.

(AR3) Si D es indescomponible, entonces para todo no-isomorfismo $t : D \rightarrow C$ tenemos que $ht = 0$.

Los triángulos de Auslander-Reiten están relacionados con las sucesiones de Auslander-Reiten ya que satisfacen $A \cong \tau_{\mathcal{A}} C$.

La siguiente proposición da una relación entre el funtor de Serre y los triángulos de Auslander-Reiten en cierto tipo de categorías. Más aún, nos permite calcular el funtor de Serre en objetos en términos del trasladado de Auslander Reiten y el Shift (o funtor suspensión).

Proposición 4.3.3. [RVdB02, Teorema I 2.4] Sea \mathcal{A} una k -categoría triangulada, Hom-finita y Krull-Schmidt. Sin equivalentes:

1. \mathcal{A} tiene un funtor de Serre.
2. \mathcal{A} tiene triángulos de Auslander-Reiten.

Si alguna de las dos condiciones se satisface, entonces la acción del funtor de Serre en los objetos coincide con $\tau_{\mathcal{A}}\Sigma$, donde Σ es el funtor suspensión de \mathcal{A} .

Lema 4.3.4. Sea \mathcal{C} una categoría triangular, Hom-finita y 2-Calabi-Yau. Entonces el trasladado de Auslander-Reiten τ de \mathcal{C} coincide con el funtor suspensión Σ de \mathcal{C} en objetos.

Demostración. De la Proposición 4.3.3, tenemos que en la categoría \mathcal{C} , el funtor de Serre \mathbb{S} coincide con $\tau\Sigma$, donde Σ es el funtor suspensión de \mathcal{C} . Como \mathcal{C} es 2-Calabi-Yau, por definición el funtor de Serre \mathbb{S} coincide con Σ^2 , entonces

$$\tau\Sigma \cong \mathbb{S} \cong \Sigma^2,$$

por tanto $\tau \cong \Sigma$ en objetos. □

Observación 4.3.5. Del Lema 4.3.1, tenemos que la subcategoría $\text{add}(T)$ es cerrada bajo el cuadrado del trasladado de Auslander-Reiten τ^2 , entonces por el Lema 4.3.4 también es cerrada bajo Σ^2 .

Proposición 4.3.6. Sea Λ un álgebra 2-Calabi-Yau inclinada. Si Λ es un álgebra simétrica, entonces el carcaj de Auslander-Reiten de la categoría estable $\underline{\text{mód}}(\Lambda)$ consiste de tubos estables de rango 1 o 2.

Demostración. Sea Λ un álgebra 2-Calabi-Yau inclinada, por definición existe una categoría \mathcal{C} Hom-finita, 2-Calabi-Yau y un objeto canónico inclinante de conglomerado $T \in \mathcal{C}$ tal que $\text{End}_{\mathcal{C}}(T) = \Lambda^{\text{op}}$.

Por hipótesis Λ es un álgebra simétrica, en particular es auto-inyectiva, por tanto por el Lema 4.3.1 sabemos que $\text{add}(T)$ es cerrada bajo Σ^2 (ver Observación 4.3.5). Entonces, por la construcción estándar de categorías n -anguladas se verifica que $(\text{add}(T), \Sigma_4, \diamond)$ es una categoría

4-angulada y su funtor suspensión Σ_4 coincide con Σ^2 (ver Capítulo 2 para la construcción estándar). Recordemos que \mathcal{C} es 2-Calabi-Yau, por tanto el funtor de Serre \mathbb{S} coincide con

$$\Sigma^2 = \Sigma_4.$$

Por otro lado, la categoría $\underline{\text{mód}}\Lambda$ es 3-Calabi-Yau (ver [GKO13, Sección 6.3]). En efecto, de manera análoga al caso triangular, existe un isomorfismo triangular entre

$$\Sigma_4 \cong \Omega_{\underline{\text{mód}}\Lambda}^{-4}$$

en $\underline{\text{mód}}\Lambda$. Además, se puede probar que el funtor de Serre $\mathbb{S}_{\underline{\text{mód}}\Lambda}$ de la categoría $\underline{\text{mód}}\Lambda$ es $\Omega_{\underline{\text{mód}}\Lambda} \circ \mathbb{S}$ (ver [GKO13, Sección 5.2]), por tanto:

$$\mathbb{S}_{\underline{\text{mód}}\Lambda} \cong \Omega_{\underline{\text{mód}}\Lambda} \circ \mathbb{S} \cong \Omega_{\underline{\text{mód}}\Lambda} \circ \Sigma_4 \cong \Omega_{\underline{\text{mód}}\Lambda} \circ \Omega_{\underline{\text{mód}}\Lambda}^{-4} = (\Omega_{\underline{\text{mód}}\Lambda}^{-1})^3 \cong \Sigma_4^3$$

Sabemos que el funtor suspensión de $\underline{\text{mód}}\Lambda$ coincide con la sizigia Ω^{-1} y como $\underline{\text{mód}}\Lambda$ es 3-Calabi-Yau, por definición, tenemos que el funtor de Serre $\mathbb{S}_{\underline{\text{mód}}\Lambda}$ es isomorfo a Ω^{-3} . Por tanto, por la relación entre el funtores suspensión, el trasladado de Auslander-Reiten y el funtor de Serre dada por Reiten y Van der Bergh en [RVdB02, Proposición I 2.3] tenemos que $\Omega^{-1}\tau_\Lambda$ es isomorfo al funtor de Serre Ω^{-3} , de donde $\Omega^{-2} = \tau_\Lambda$.

Por otro lado, como Λ es un álgebra simétrica sabemos que $\Omega^2 = \tau_\Lambda$, por lo tanto $\Omega^{-2} = \Omega^2$, es decir, $\Omega^4 = \mathbb{1}_{\underline{\text{mód}}\Lambda}$. De donde, $\Omega^4 = \tau_\Lambda^2 = \mathbb{1}_{\underline{\text{mód}}\Lambda}$. □

Como consecuencia de la Proposición 4.3.6 demostraremos que una propiedad semejante se verifica en la categoría \mathcal{C} y en particular para álgebras 2-Calabi-Yau inclinadas.

Observación 4.3.7. Se sigue de Proposición 4.3.6 que la categoría de módulos estable de las álgebras 2-Calabi-Yau inclinadas simétricas es Ω -periódica y el período es un divisor de 4, pues tenemos la relación $\Omega^4 = \mathbb{1}_{\underline{\text{mód}}\Lambda}$.

Un resultado recíproco parcial a la Proposición 4.3.6, fue dado por Burban, Iyama, Keller y Reiten en [BIKR08], dicho resultado se encuentra enunciado en la siguiente proposición.

Proposición 4.3.8. [BIKR08, Lema 2.2 c)] Sean T un objeto inclinante de conglomerado en una categoría \mathcal{C} Hom-finita, conexa y 2-Calabi-Yau, y $\Lambda = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)$. Sea $\tau_{\mathcal{C}}$ el trasladado de Auslander-Reiten de \mathcal{C} . Supongamos que $\tau_{\mathcal{C}}^2 = \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$. Entonces se cumplen las siguientes condiciones.

- (i) Λ es un álgebra simétrica.
- (ii) Los Λ -módulos indescomponibles no-proyectivos tienen $\tau_{\mathcal{C}}$ -período 1 o 2.
- (iii) Si \mathcal{C} tiene un número infinito de objetos indescomponibles no-isomorfos, entonces todos los componentes en el carcaj de Auslander-Reiten de Λ son tubos de rango 1 o 2.

El siguiente resultado describe el carcaj de Auslander-Reiten de una categoría Hom-finita, 2-Calabi-Yau con al menos un objeto inclinante de conglomerado cuya álgebra de endomorfismo es simétrica. Para probarlo utilizaremos fuertemente la Teoría de categorías n -anguladas, recordemos que en este contexto denotamos por Σ el funtor suspensión de una categoría triangular y por Σ_n el funtor suspensión de una categoría n -angulada $(\mathcal{F}, \Sigma_n, \diamond)$ (ver [GKO13] o Capítulo 2 para más detalles).

Proposición 4.3.9. *Sean \mathcal{C} una categoría Hom-finita, 2-Calabi-Yau. Si existe un álgebra 2-Calabi-Yau simétrica, entonces el carcaj de Auslander-Reiten de la categoría \mathcal{C} consiste solamente de tubos estables de rango 1 o 2.*

Demostración. Sea τ el trasladado de Auslander-Reiten de \mathcal{C} y Σ el funtor suspensión de \mathcal{C} . Puesto que \mathcal{C} es 2-Calabi-Yau tenemos por Lema 4.3.4 que $\tau = \Sigma$.

Sea T el objeto conglomerado-inclinante en \mathcal{C} tal que $\Lambda = \text{End}_{\mathcal{C}}(T)^{op}$ es simétrica. En particular, Λ es un álgebra auto-inyectiva 2-Calabi-Yau inclinada de conglomerado, por tanto por [GKO13, Proposición 5.4] tenemos que $\text{proj}(\Lambda) = \text{add}(T)$ es una categoría 4-angulada y el funtor de Nakayama ν es el funtor suspensión.

Por otro lado, por [GKO13, Observación 5.3], el funtor suspensión de la categoría 4-angulada $\text{add}T$ satisface que $\Sigma_4 = \Sigma^2$. Y como el funtor de Nakayama también es el funtor suspensión tenemos que $\Sigma_4 = \nu$. Es bien conocido que el funtor de Nakayama de un álgebra simétrica es la identidad, por tanto $\Sigma^2 = \mathbb{1}_{\text{proj}\Lambda}$. Por tanto, $\tau^2 = \Sigma^2 = \mathbb{1}_{\text{add}T}$.

El resultado se sigue de la Proposición 4.3.10 y la equivalencia $\mathcal{C}/(\text{add}(\Sigma T)) \stackrel{F}{\cong} \text{mod}\Lambda$ dada en [KR07, Proposición 2.1]. □

Observemos que toda álgebra Jacobiana $\Lambda = \mathcal{P}(Q, W)$ de dimensión finita es 2-Calabi-Yau inclinada, ya que por [Ami09, Teorema 3.6] se tiene que la categoría $\mathcal{C}_{(Q, W)}$ es hom-finita y 2-CY y existe un objeto canónico inclinante de conglomerado $T \in \mathcal{C}$ tal que $\text{End}_{\mathcal{C}}(T) = \Lambda^{op}$, luego tenemos los siguientes corolarios.

Corolario 4.3.10. *Sea Λ un álgebra Jacobiana de dimensión finita. Si Λ es simétrica, entonces el carcaj de Auslander-Reiten de la categoría estable $\underline{\text{mod}}(\Lambda)$ consiste de tubos estables de rango 1 o 2.*

Corolario 4.3.11. *Sea (Q, W) un carcaj con potencial tal que $\mathcal{P}(Q, W)$ es simétrica y de dimensión finita. Entonces el carcaj de Auslander-Reiten de la categoría $\mathcal{C}_{(Q, W)}$ consiste de tubos estables de rango 1 o 2.*

4.4. Categoría de módulos de álgebras Jacobianas y categorías de conglomerado de superficies cerradas

En esta sección estudiaremos el carcaj de Auslander-Reiten de la categoría estable de módulos de un álgebra Jacobiana proveniente de una superficie cerrada, así como también el carcaj de Auslander-Reiten de la categoría de conglomerado de una superficie cerrada.

Por el Teorema 4.2.3, sabemos que las álgebras Jacobianas, asociadas a superficies cerradas con punciones, resultan ser débilmente simétricas. Más aún, existe una triangulación \mathbb{T} para cada superficie (S, M) , cuya álgebra Jacobiana resulta ser simétrica, por ello, del Corolario 4.3.11, tenemos el siguiente resultado. 4.2.3

Corolario 4.4.1. *Sea S una superficie cerrada orientada con una colección no vacía y finita M de punciones, excluyendo sólo el caso de la esfera con 4 punciones (o menos). El carcaj de Auslander-Reiten de la categoría generalizada de conglomerado $\mathcal{C}_{(S, M)}$ consiste solamente de tubos estables de rango 1 o 2.*

Demostración. Sea \mathbb{T} la triangulación de la superficie con punciones (S, M) tal que el álgebra Jacobiana $\Lambda = \mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ es simétrica, la existencia de dicha triangulación esta exhibida en [Ladc, Proposición 4.7].

Por [FST08, Proposición 4.10], [LFb, Teorema 7.1] y [KY11, Teorema 3.2], la categoría de conglomerado generalizada \mathcal{C} es independiente de la triangulación escogida, por tanto la categoría generalizada de conglomerado \mathcal{C} es equivalente a la categoría de conglomerado generalizada $\mathcal{C}_{(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))}$. Puesto que Λ es simétrica, por el Corolario 4.3.11, tenemos el resultado. □

Ahora probaremos una parte del Teorema 4.2.4, enunciado en la siguiente proposición.

Proposición 4.4.2. *Sea \mathbb{T} una triangulación etiquetada de una superficie con punciones (S, \mathbb{M}) . Entonces, el álgebra $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ es simétrica y el carcaj de Auslander-Reiten del álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}, \lambda))$ consiste sólo en tubos estables de rango 1 o 2.*

Demostración. Sea \mathbb{T} una triangulación de la superficie marcada (S, \mathbb{M}) . Denotemos por Λ al álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ de la triangulación \mathbb{T} .

Sea T el objeto inclinante de conglomerado de \mathcal{C} tal que $\mathcal{C}/(\text{add}(\Sigma T)) \xrightarrow{F} \text{mod}\Lambda$. El funtor F además induce la equivalencia $\text{mod}\Lambda \cong \mathcal{C}/(T, \Sigma T)$. El resultado se sigue directamente del Corolario 4.4.1.

Por otro lado, para probar que el álgebra Λ es simétrica, basta recordar que el traslado de Auslander-Reiten $\tau_{\mathcal{C}}$ de la categoría \mathcal{C} satisface, por el Corolario 4.4.1, que $\tau_{\mathcal{C}}^2 = 1$, pues por [BIKR08, Lema 2.2], tenemos que $D\Lambda = \Lambda$ como A - A -bimódulo, en efecto,

$$D\Lambda = D\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \Sigma^2 T) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \tau^2 T) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, T) = \Lambda.$$

□

4.5. Tipo de crecimiento de un álgebra Jacobiana de superficies cerradas

En esta sección estudiaremos el tipo de crecimiento de un álgebra Jacobiana de superficies cerradas, de esta manera concluiremos con la prueba del Teorema 4.2.4. El resultado principal de ésta sección se expresa en la siguiente proposición.

Proposición 4.5.1. *Sea triangulación \mathbb{T} arbitraria de una superficie cerrada, excluyendo sólo el caso de la esfera con 4 punciones. El álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ es un álgebra mansa de crecimiento exponencial.*

Empezaremos enunciado un Teorema sobre el comportamiento de la mutación de un carcaj con potencial y las álgebras mansas.

Teorema. [GLFS, Teorema 3.6] *Sea (Q, W) un carcaj con potencial y supongamos que $k \in Q_0$ no forma parte de un 2-ciclo, es decir, $\tilde{\mu}_k(Q, W)$ está definido. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $\mathcal{P}(Q, W)$ es mansa;

(ii) $\mathcal{P}(\tilde{\mu}_k(Q, W))$ es mansa;

(iii) $\mathcal{P}(\mu_k(Q, W))$ es mansa.

Observación 4.5.2. La prueba del Teorema 4.5 consiste en mostrar que si tomamos un $\mathcal{P}(Q, W)$ -módulo no simple, su vector dimensión cambia sólo en el lugar k y éste número está acotado por la cantidad de flechas incidentes a k . De este hecho se sigue que la mutación no sólo preserva el tipo de representación sino también el crecimiento exponencial.

Para probar que las álgebras Jacobianas de superficies cerradas son de crecimiento exponencial analizaremos, por un lado, el caso particular de la esfera con 5 punciones, y por otro, las demás superficies. En ambos casos, dado que las mutaciones de carcajes con potenciales preservan el tipo de crecimiento exponencial (ver Observación 4.5.2), es suficiente determinar una triangulación para cada superficie, cuya álgebra Jacobiana tenga un crecimiento exponencial.

Lema 4.5.3. *Sea Λ un álgebra de dimensión finita y Λ' un cociente de Λ . Si Λ' es un álgebra de crecimiento exponencial, entonces Λ también lo es.*

La prueba del Lema se sigue del hecho que todo Λ' -módulo es también un Λ -módulo y de que si $L \cong N$ como $\Lambda - k[x]$ -bimódulos, entonces $L \cong N$ como $\Lambda' - k[x]$ -bimódulos. Por tanto $\mu_{\Lambda'}(d) \leq \mu_{\Lambda}(d)$.

La idea de la prueba del resultado principal de esta sección es construir un cociente de un álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ asociado a una triangulación \mathbb{T} de una superficie cerrada, tal que su cociente es todavía de crecimiento exponencial. En los dos casos que necesitamos analizar vamos a trabajar con dos tipos de álgebras muy estudiadas en Teoría de representaciones que son ejemplo típicos de álgebras mansas, a continuación daremos las definiciones de dichas álgebras.

Definición 4.5.4. Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj y Λ un álgebra isomorfa a un álgebra de caminos $k\langle Q \rangle/I$.

■ Λ es un álgebra *gentil* si se satisfacen las siguientes condiciones:

(g1) Para todo $k \in Q_0$ tenemos $|\{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) = k\}| \leq 2$ y $|\{\alpha \in Q_1 \mid t(\alpha) = k\}| \leq 2$.

- (g2) El ideal I está generado por caminos de longitud 2.
- (g3) Si para una flecha $\beta \in Q_1$ existen dos caminos $\alpha_1\beta \neq \alpha_2\beta$ de longitud 2, entonces exactamente uno de esos caminos pertenece a I .
- (g4) Si para una flecha $\beta \in Q_1$ existen dos caminos $\beta\gamma_1 \neq \beta\gamma_2$ de longitud 2, entonces exactamente uno de esos caminos pertenece a I .

- Λ es un álgebra *gentil torcida* si existe un conjunto

$$L \subset \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) = t(\alpha)\}$$

de lazos de Q tal que Λ satisface las siguientes condiciones:

- (sg1) Para todo $k \in Q_0$ tenemos $|\{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) = k\}| \leq 2$ y $|\{\alpha \in Q_1 \mid t(\alpha) = k\}| \leq 2$.
- (sg2) El ideal I está generado por caminos de longitud 2, y por todos los elementos de la forma $\alpha^2 - \alpha$ con $\alpha \in L$.
- (sg3) Si para una flecha $\beta \in Q_1 \setminus L$ existen dos caminos $\alpha_1\beta \neq \alpha_2\beta$ de longitud 2, entonces exactamente uno de esos caminos pertenece a I .
- (sg4) Si para una flecha $\beta \in Q_1 \setminus L$ existen dos caminos $\beta\gamma_1 \neq \beta\gamma_2$ de longitud 2, entonces exactamente uno de esos caminos pertenece a I .

- Λ es un álgebra *de cuerdas* si satisface las siguientes condiciones:

- (s1) El ideal I está generado por relaciones monomiales.
- (s2) Para todo $k \in Q_0$ tenemos $|\{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) = k\}| \leq 2$ y $|\{\alpha \in Q_1 \mid t(\alpha) = k\}| \leq 2$.
- (s3) Para toda flecha $\beta \in Q_1$, existe a lo sumo una flecha α tal que $\alpha\beta \notin I$.
- (s4) Para toda flecha $\beta \in Q_1$, existe a lo sumo una flecha γ tal que $\beta\gamma \notin I$.

Observación 4.5.5. La definición original de álgebra gentil fue dada por Assem y Skowroński en [AS87, Sección 1], la presentada en este trabajo es un poco más general y fue dada por Geiss, Labardini-Fragoso y Schröer en [GLFS]. Por otra parte, la definición de álgebra gentil torcida fue dada por Geiss y de la Peña en [GdlP99, Definición 4.2]. Las álgebras de cuerdas son un caso particular de las álgebras biseriales especiales, estudiadas por Skowroński y Waschbüsch en [SW83, Sección 1].

Sea $\Lambda = k\langle Q \rangle / I$ una k -álgebra de dimensión finita. Supongamos que Λ es un álgebra de cuerdas o gentil torcida. Los Λ -módulos indescomponibles tienen una descripción combinatoria en términos de ciertas “palabras” en el carcaj Q , que eviten el ideal I . Para dar una idea más precisa de esto, empezaremos dando la definición de palabra para álgebras de cuerdas.

Definición 4.5.6. Sea $\Lambda = k\langle Q \rangle / I$ un álgebra de cuerdas. Dada una flecha $\alpha : i \rightarrow j$ en un carcaj Q , denotamos por $\alpha^{-1} : j \rightarrow i$ a la *inversa formal de α* , es decir, $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ y $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$, en particular $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$. Sea \bar{Q}_1 el conjunto de todas la flechas de Q y sus inversas formales, los elementos de \bar{Q}_1 son llamados *letras*.

Una *palabra*, de un álgebra $k\langle Q \rangle / I$, es una sucesión $w = l_1 l_2 \cdots l_n$ de elementos de \bar{Q}_1 tal que

(W1) tenemos que $l_i^{-1} \neq l_{i+1}$, para todo $i \leq i < n$;

(W2) ninguna subsucesión propia de w o su inversa pertenece a I .

Decimos que la palabra w tiene *longitud n* . Si además, la palabra w satisface la condición

(W3) $t(l_i) = s(l_{i+1})$ para todo $1 \leq i < n$;

decimos que w es una *cuerda*.

Una cuerda w es *cíclica* si toda potencia w^n es una cuerda, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dada una cuerda cíclica, las potencias w^m con $m \geq 2$ son llamadas *potencias propias*. Una palabra cíclica w es *primitiva* si no es una potencia propia de ninguna otra palabra. Una *banda* es una cuerda cíclica primitiva.

Ambos tipos de palabras inducen módulos indescomponibles. Más aún, la unión de todos los módulos banda y cuerda es una lista completa de módulos indescomponibles (ver [SW83, Rin84]). De manera similar, es posible definir una estructura combinatoria de módulos en las álgebras gentiles torcidas.

4.5.1. Superficies cerradas que no sean la esfera con 5 punciones

En esta sección demostraremos que toda álgebra Jacobiana que proviene de una superficie cerrada que no sea una esfera con 4 o 5 punciones es un álgebra de crecimiento exponencial. Primero introduciremos la definición de valencia de una punción.

Definición 4.5.7. Para una triangulación ideal \mathbb{T} , la *valencia* $\text{val}_{\mathbb{T}}(p)$ de una punción $p \in \mathbb{P}$ es el número de arcos en \mathbb{T} que inciden en p , cada lazo en p se cuenta dos veces.

En la siguiente Observación enumeraremos algunos resultados relevantes sobre triangulaciones sin triángulos auto-pegados y algunas propiedades relacionadas a la valencia de punciones de una triangulación.

Observación 4.5.8. Sean \mathbb{T} una triangulación sin triángulos auto-pegados de una superficie marcada sin frontera (S, \mathbb{M}) y $(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ el carcaj con potencial asociado a la triangulación \mathbb{T} .

1. El carcaj $Q(\mathbb{T})$ se obtiene al pegar sólo bloques de tipo II. Recordemos que los bloques de tipo II corresponden a un 3-ciclo. Ver [FST08] o Capítulo 3 para más detalles.
2. Si toda punciones $p \in \mathbb{M}$ tiene valencia al menos 3, entonces cualquier flecha α de $Q(\mathbb{T})$ tiene exactamente dos flechas β, γ que empiezan en el vértice terminal de α y exactamente una flecha δ que termina en el vértice terminal de α . Siguiendo la notación de Ladkani en [Ladc] hay dos funciones $f, g : Q_1(\mathbb{T}) \rightarrow Q_1(\mathbb{T})$ tales que $\alpha f(\alpha) f^2(\alpha)$ es un 3-ciclo correspondiente a un triángulo en \mathbb{T} y $(g^{n\alpha-1}(\alpha))(g^{n\alpha-2}(\alpha)) \dots (g(\alpha))(\alpha)$ es un ciclo que rodea a una punción p , donde n es el menor número natural tal que $g^{n\alpha}(\alpha) = \alpha$ (ver Figura 4.2).

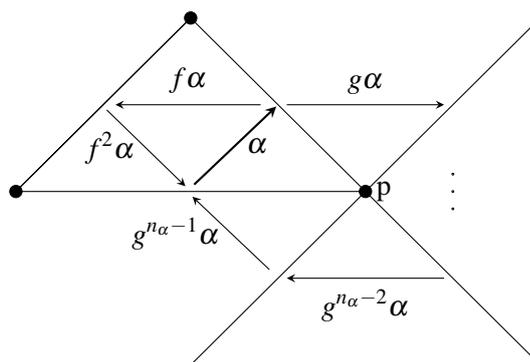


Figura 4.2: Funciones f y g

3. Además, si cada punción tiene valencia al menos 4, entonces toda relación de conmutatividad involucra exactamente a un camino de longitud 2.

Lema 4.5.9. [Ladc, Proposición 5.1] Sea (S, \mathbb{M}) una superficie cerrada con punciones que no es la esfera con 4 o 5 punciones. Entonces existe una triangulación \mathbb{T} sin triángulos auto-pegados tal que cada punción $p \in \mathbb{M}$ tiene valencia al menos cuatro.

Demostración. Sea S una superficie cerrada de género g . Sabemos por los resultados del Capítulo 3, que toda superficie tiene una triangulación sin triángulos autopegados.

La demostración es por inducción sobre el número de punciones.

Consideremos una superficie S con exactamente una punción p de género $g \geq 1$ y sea \mathbb{T} una triangulación sin triángulos auto-pegados. Todos los arcos de la triangulación son incidentes a un sólo punto, por tanto, todos son lazos, es decir, que la valencia $\text{val}(p)$ de p es el doble de la cantidad de arcos que tiene la triangulación \mathbb{T} . Además, sabemos que \mathbb{T} tiene exactamente $6g - 3$ arcos, luego, la valencia $\text{val}(p) = 12g - 6 \geq 6$, pues $g \geq 1$.

Veamos que existe una triangulación sin triángulos auto-pegados tal que cada punción $p \in \mathbb{M}$ tiene valencia al menos cuatro para la superficie S con $(n + 1)$ punciones. Por hipótesis de inducción existe una triangulación \mathbb{T} con esta propiedad para la superficie S con n punciones. Ahora consideremos dos triángulos de \mathbb{T} que comparten un arco γ que va de una punción p_i a una punción p_j y sean p_k y p_l las otras punciones. Consideremos el punto medio del arco γ y definamos ese punto medio como una nueva punción p_{n+1} . Si consideramos el conjunto de arcos $\mathbb{T} \setminus \{\gamma\} \cup \{\gamma_1, \gamma_2\}$, donde γ_1 es el nuevo arco que va de p_i a p_{n+1} y γ_2 es el nuevo arco que va de p_j a p_{n+1} , no forma una triangulación de la superficie S con $(n + 1)$ punciones, pues es necesario incluir dos arcos, γ_3 y γ_4 , más incidentes a p_{n+1} y a las punciones restantes p_k y p_l (ver Figura 4.3).

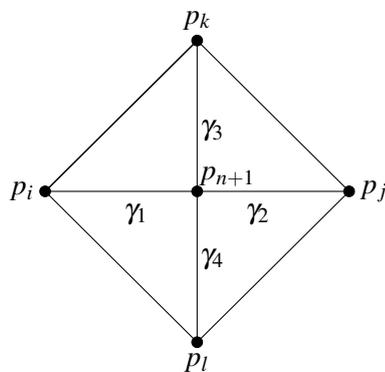


Figura 4.3: Nuevos arcos en \mathbb{T}'

De esta manera, el conjunto de arcos $\mathbb{T}' = \mathbb{T} \setminus \{\gamma\} \cup \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$, es una triangulación con la valencia de cada punción deseada.

Para el caso de la esfera con 6 punciones, es claro que existe una triangulación sin triángulos auto-pegados y donde toda punción tenga valencia 4. El análisis inductivo anterior también se puede aplicar en este caso. \square

Demostración de crecimiento exponencial. Sea (S, \mathbb{M}) una superficie cerrada con punciones que no es una esfera con 4 o 5 punciones. Sea \mathbb{T} la triangulación sin triángulos auto-pegados tal que cada punción $p \in \mathbb{M}$ tiene valencia al menos cuatro, cuya existencia está garantizada por el Lema 4.5.9.

Sean $f, g : Q_1(\mathbb{T}) \rightarrow Q_1(\mathbb{T})$ las funciones definidas en la Observación 4.5.8 parte 2). Sea I el ideal en Λ generado por las relaciones $\alpha f(\alpha)$ para cada flecha α de $Q_1(\mathbb{T})$ y considere el cociente $\Lambda' = \Lambda/I$.

Observe que por las relaciones del ideal Jacobiano son relaciones de conmutatividad que involucran un camino de longitud 2 y otro de mayor longitud, por tanto en el álgebra cociente Λ' dada una flecha α en $Q_1(\mathbb{T})$ existe una única flecha, a saber, $f(\alpha)$ tal que $\alpha f(\alpha)$ es una relación cero y existe una única flecha $f^2(\alpha)$ tal que $f^2(\alpha)\alpha$ es una relación cero. Por tanto el cociente Λ' es un álgebra de cuerdas.

Para probar que Λ' es un álgebra de crecimiento exponencial es suficiente mostrar que Λ' admite dos bandas v y w tales que cualquier combinación arbitraria de ellas es otra vez una banda. Para probar esta afirmación, es necesario realizar el siguiente argumento: supongamos que Λ' es de crecimiento polinomial, es decir, que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_{\Lambda'}(d) \leq d^m$ para todo $d \in \mathbb{N}$. Sea q un primo tal que

$$2^q - 2 > 2^{q-1} > q^{m+3}. \quad (4.1)$$

Supongamos que la longitud de u es menor o igual a la longitud de w . Consideremos palabras

$$u = v^{n_1} w^{r_1} \dots v^{n_t} w^{r_t},$$

con $\sum_i^t (n_i + r_i) = q$, que sean diferentes a v^q y w^q , observemos que éste tipo de palabras inducen Λ' -módulos indescomponibles de dimensión

$$\sum_i (n_i(\text{long } v) + r_i(\text{long } w)).$$

Puesto que la longitud de u es menor o igual a la longitud de v tenemos

$$\sum_i (n_i(\text{long } v) + r_i(\text{long } w)) \leq \sum_i (n_i(\text{long } w) + r_i(\text{long } w)) = (\text{long } w)q$$

Es decir, este tipo de palabras inducen Λ' -módulos indescomponibles de dimensión menor o igual a kq , donde k es la longitud de w . Por otro lado, hay $(2^q - 2)$ diferentes palabras de la forma anterior, por tanto

$$\sum_{d \leq kq} \mu_{\Lambda'}(d) \geq \frac{2^q - 2}{q}. \quad (4.2)$$

Luego, tenemos que existe un $s \leq kq$ tal que

$$\mu_{\Lambda'}(s) \geq \frac{2^q - 2}{kq^2} \quad (4.3)$$

pues en caso contrario tendríamos la desigualdad opuesta en 4.2. Por otro lado, $\mu_{\Lambda'}(s) \leq s^m \leq (kq)^m$, pues Λ' es de crecimiento polinomial, por tanto, de esta última relación y la dada en la Ecuación 4.3 tenemos que

$$\frac{2^q - 2}{kq^2} \leq \mu_{\Lambda'}(s) \leq s^m \leq k^m q^m,$$

luego $2^q - 2 \leq k^{m+1} q^{m+2}$, lo cual es una contradicción con la elección de q , ya que

$$2^q - 2 > 2^{q-1} > q^{m+3} > k^{m+1} q^{m+2}.$$

Por tanto A' es un álgebra de crecimiento exponencial. Este argumento fue dado por primera vez por Skowroński en [Sko87, Lema 1].

Ahora construiremos las bandas requeridas. Consideremos α una flecha del carcaj $Q(\mathbb{T})$. Los vértices de α son dos arcos de un triángulo Δ_α de \mathbb{T} , sean p y q los puntos finales de dichos arcos. Denotamos por $\mathbb{T}(\alpha)$ el conjunto de arcos que tienen como punto final a p o q . En la figura 4.4, se muestra dicho conjunto de arcos junto con el carcaj asociado a los arcos de $\mathbb{T}(\alpha)$ y los ciclos largos que rodean las punciones p y q .

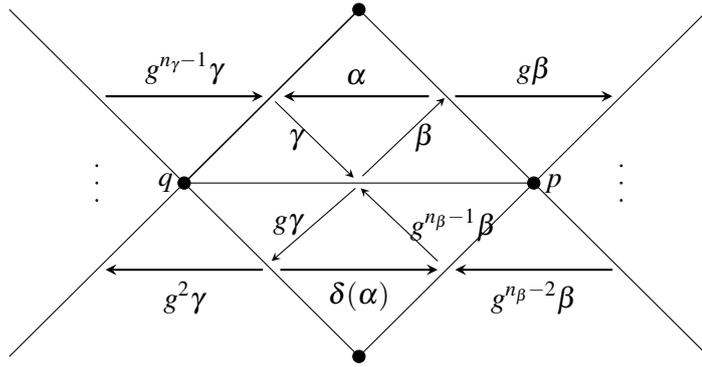
Denotemos por $\alpha\gamma\beta$ al 3-ciclo proveniente del triángulo Δ_α y por $\delta(\alpha)$ la flecha $f g \gamma$.

Rodeando a la punción p , existe un ciclo $w(p)$ que empieza en $s(\alpha)$, el cual, utilizando la función g , se escribe como

$$(\gamma)(g\gamma)(g^2\gamma)(g^3\gamma) \cdots (g^{n_\gamma-1}\gamma),$$

y rodeando a q existe un ciclo $w(q)$ que empieza en $t(\alpha)$ y utilizando la función g es

$$(g\beta)(g^2\beta) \cdots (g^{n_\beta-2}\beta)(g^{n_\beta-1}\beta)(\beta).$$


 Figura 4.4: Subconjunto de arcos \mathbb{T}_α

Utilizando un pedazo de estos ciclos construiremos las bandas requeridas. Sea $\rho_1(\alpha)$ la palabra

$$(g^2\gamma)(g^3\gamma)\cdots(g^{n_\gamma-1}\gamma),$$

$\rho_2(\alpha)$ la palabra

$$(g\beta)(g^2\beta)\cdots(g^{n_\beta-2}\beta).$$

Entonces denotemos por $\xi(\alpha)$ la banda

$$\xi(\alpha) = (\alpha)(\rho_1(\alpha))^{-1}(\delta(\alpha))(\rho_2(\alpha))^{-1},$$

cuya expresión sustituyendo $\rho_1(\alpha)$ y $\rho_2(\alpha)$ es

$$(\alpha)((g^{n_\gamma-1}\gamma)^{-1}\cdots(g^2\gamma)^{-1})(\delta(\alpha))((g^{n_\beta-2}\beta)^{-1}\cdots(g\beta)^{-1})$$

De manera similar, vamos a construir la banda $\xi(g\beta)$ para la flecha $g\beta$, es decir, hay una pieza de triangulación $\mathbb{T}_{g\beta}$, y caminos $\rho_1(g\beta)$ y $\rho_2(g\beta)$ y una flecha $\delta' = \delta(g\beta)$, tal que

$$\xi(g\beta) = (g\beta)(\rho_1(g\beta))^{-1}(\delta')(\rho_2(g\beta))^{-1}$$

La banda que consideraremos es $\xi(g\beta)^{-1}$, es decir,

$$(\rho_2(g\beta))(\delta')^{-1}(\rho_1(g\beta))(g\beta)^{-1}.$$

Observemos que $\rho_2(g\beta) = (\alpha)(g\alpha)\cdots(g^{n_\alpha-3}\alpha)$, por tanto $\xi(g\beta)^{-1}$ es igual a

$$(\alpha)(g\alpha)\cdots(g^{n_\alpha-3}\alpha)(\delta')^{-1}(\rho_1(g\beta))(g\beta)^{-1}.$$

De donde, ambas bandas empiezan en α y terminan en $(g\beta)^{-1}$, y por la manera en que la construimos pueden componerse de manera arbitraria, luego Λ' es un álgebra de crecimiento exponencial, por tanto por el Lema 4.5.3 Λ es un álgebra de crecimiento exponencial.

El resultado se sigue del hecho de que el crecimiento exponencial se preserva bajo mutaciones (ver Observación 4.5.2).

□

4.5.2. Esfera con 5 punciones

Para analizar el caso de la esfera con 5 introduciremos la definición de triangulaciones gentiles y triangulaciones gentiles torcidas. Estas triangulaciones están fuertemente relacionadas con las álgebras con el mismo nombre.

Consideremos Q un carcaj 2-acíclico y W un potencial de Q . Denotemos por C_t el conjunto de los ciclos de longitud t en Q , entonces escribir a W de la siguiente manera:

$$W = \sum_{t \geq 3} \sum_{w_t \in C_t} \mu_{w_t} w_t$$

donde $\mu_{w_t} \in k$. Observe que $\mu_{w_t} = 0$ si es que el ciclo w_t no aparece en el potencial W . Denotemos por

$$\text{short}(W) = \min\{t \geq 3 \mid \mu_{w_t} \neq 0 \text{ para algún } w_t\}$$

y definamos

$$W_{\text{mín}} := \sum_{t=\text{short}(W)} \sum_{w_t \in C_t} \mu_{w_t} w_t.$$

Definición 4.5.10. Sea \mathbb{T} una triangulación de (S, \mathbb{M}) tal que $Q(\mathbb{T}) = \text{glue}(B_1, \dots, B_t)$ es la descomposición del carcaj Q . Decimos que \mathbb{T} es una *triangulación gentil torcida* si:

(gl3) Si $i \neq j$ entonces los bloques B_i y B_j se pegan en a lo más un vértice.

(gl4) Todo 3-ciclo en Q está contenido en uno de los bloques B_1, \dots, B_t ;

(gl5) Ninguno de los bloques B_1, \dots, B_t son del tipo V .

Observemos que la propiedad (gl3) de una triangulación gentil torcida implica que el carcaj $Q(\mathbb{T})$ no tiene dobles flechas. Además, notemos que el álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ de una triangulación \mathbb{T} gentil torcida no es necesariamente un álgebra gentil torcida, pero $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W_{\min}(\mathbb{T}))$ sí lo es.

Ejemplo 4.5.11. En este ejemplo vamos a considerar la triangulación \mathbb{T} de un disco con 4 puntos marcados y una punción dada en la Figura 4.5. Observemos que ésta triangulación es gentil torcida por definición, pues el carcaj $Q(\mathbb{T})$ está compuesto de un sólo bloque de tipo IV.

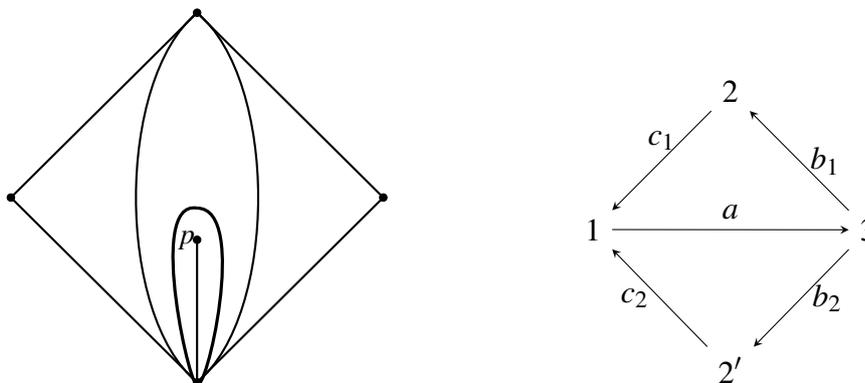


Figura 4.5: Triangulación gentil torcida

Además, para la triangulación \mathbb{T} , el potencial $W(\mathbb{T})$ es $ab_1c_1 + ab_2c_2$, por tanto el ideal Jacobian $J(\mathbb{T})$ está generado por las relaciones $ab_i, c_i a$, para cada $i = 1, 2$ y la relación $ab_1 + ab_2$. En este caso, el potencial W coincide con W_{\min} . Más aún, el álgebra $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ es isomorfa al álgebra gentil torcida $\Lambda = k\langle Q' \rangle / I$, donde Q' es el carcaj de la Figura 4.6 e I

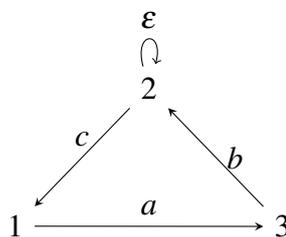


Figura 4.6: Carcaj Q'

está generado por los elementos ab, bc, ca y $\varepsilon^2 - \varepsilon$. Observemos que el ideal I no es un ideal admisible, pues la relación $\varepsilon^2 - \varepsilon$ no están contenido en \mathfrak{m}^2 , por tanto la teoría usual de álgebras

de caminos no se aplica a Λ , en particular el número de simples no coincide con el número de vértices del carcaj.

Las álgebras gentiles torcidas son un caso particular de las álgebras Clannish (ver [CB89, Sección 2.5] para más detalles de este tipo de álgebras). Crawley-Boevey en [CB89] prueba que los módulos indescomponibles sobre álgebras Clannish tienen una descripción combinatoria muy parecida a las álgebras de cuerdas, es decir, que los módulos indescomponibles corresponden a cierto tipo de palabras que se clasifican en tres clases, las llamadas *cuerdas*, *bandas asimétricas* y *bandas simétricas*. De manera similar al caso de las álgebras de cuerdas, tenemos un conjunto de letras formadas por las flechas del carcaj Q . Empezaremos definiendo qué es una letra y un clan, pues para construir ese tipo de palabras tenemos que construir primero un clan.

Definición 4.5.12. Sea Q un carcaj y S_p un subconjunto de los lazos de Q .

- Un elemento del conjunto S_p es llamado *lazo especial* y aquellas flechas que no pertenezcan a S_p se llaman *flechas ordinarias*.
- Una *letra*, como en el caso de las álgebras de cuerdas, es o bien una flecha a o bien su inversa formal a^{-1} o un lazo especial b^* .
- Un *clan* es una 5-upla $(k, Q, S_p, (q_b \mid b \in S_p), \leq)$ donde k es un cuerpo, $(q_b \mid b \in S_p)$ es una familia de polinomios q_b con coeficientes en k indexada por el conjunto S_p , y para cada vértice $i \in Q$ se tiene un orden parcial \leq sobre las letras que terminan en i , que forma una unión disjunta de una o dos cadenas (órdenes lineales).
- Sea $C = (k, Q, S_p, (q_b \mid b \in S_p), \leq)$ un clan. Una *palabra* w es una sucesión formal de letras $w_1 \cdots w_n$, con $n > 0$, tal que $t(w_i) = s(w_{i+1})$ para toda i y tal que las letras w_i y w_{i+1}^{-1} son incomparables con el orden parcial \leq sobre las letras que terminan en $t(w_i)$.
- Una palabra w es *inextensible* si no existe una letra x tal que wx es una palabra.
- Una *cuerda* es una palabra inextensible.
- Una *banda* es una palabra w tal que ww es una palabra y w no es una potencia propia de otra palabra w' .

Ejemplo 4.5.13. Retomando el Ejemplo 4.5.11, dada el álgebra de gentil torcida $\Lambda = k\langle Q' \rangle / I$, construiremos un clan para ésta álgebra. En este caso, C_Λ es la 5-upla $(k, Q', S_p, (q_b \mid b \in S_p), \leq)$, donde $S_p = \{\varepsilon\}$, el polinomio $q_\varepsilon(x) = x^2 - x$ y los órdenes parciales son: $a \leq b^{-1}$, $b \leq c^{-1}$ y $c \leq a^{-1}$.

Lema 4.5.14. Sea \mathbb{T} una triangulación de una esfera con 5 punciones. Entonces, el álgebra Jacobiana $\mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$ es de crecimiento exponencial.

Demostración. Consideremos la triangulación gentil torcida \mathbb{T} de la Figura 4.7 y el álgebra Jacobiana $\Lambda = \mathcal{P}(Q(\mathbb{T}), W(\mathbb{T}))$. La triangulación gentil torcida \mathbb{T} fue estudiada por primera vez en [GLFS, Sección 7.7, Figura 18].

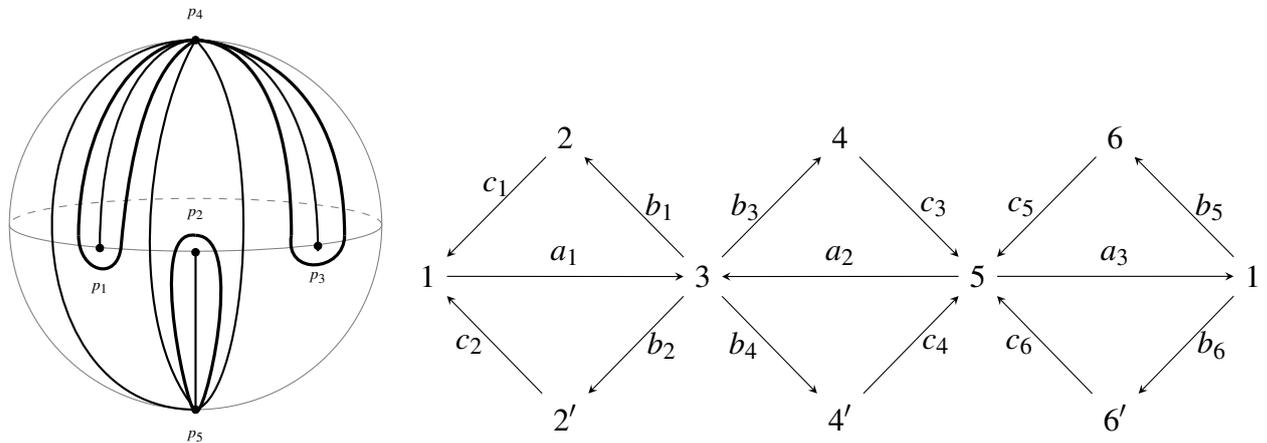


Figura 4.7: Triangulación \mathbb{T} de la esfera con 5 punciones

Sea I el ideal de $k\langle\langle Q \rangle\rangle$ generado por el conjunto $\partial(W')$ de las derivadas cíclicas de W' , donde $W' = b_5c_5a_2b_1c_1 + a_1b_4c_4a_3$. Observe que el cociente $\Lambda' = \Lambda/I$ es isomorfo a $k\langle Q' \rangle/J$ donde Q' es el carcaj en la Figura 4.8 y J es el ideal de $k\langle Q' \rangle$ generado por $\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i$, $a_i b_i$, $b_i c_i$ y $c_i a_i$ para $i = 1, 2, 3$ y por todos los caminos de longitud al menos 4. Entonces el álgebra Λ/I es gentil torcida. Nuevamente observemos que $\varepsilon_i^2 - \varepsilon$ no son elementos de \mathfrak{m}^2 , por tanto, el carcaj del álgebra $k\langle Q' \rangle/J$ no coincide con el carcaj de Gabriel.

Las álgebras gentiles torcidas y las álgebras de cuerdas tienen una estructura similar de palabras, por tanto es suficiente mostrar que existe un clan $C = (k, Q', S_p, (q_b), \leq)$ (ver [CB89, Definición 1.1]) que admite dos bandas tal que la combinación arbitraria de bandas vuelve a ser una banda.

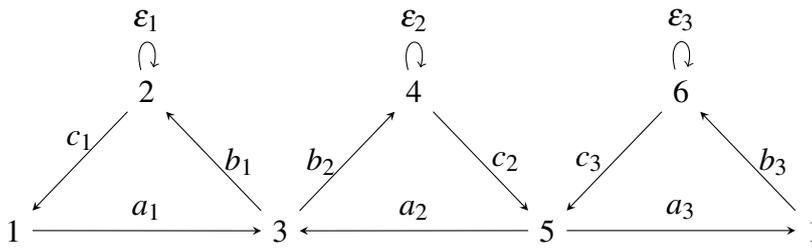


Figura 4.8: Carcaj gentil torcido Q'

Sea $C = (k, Q', S_p, (q_b \mid b \in S_p), \leq)$ un clan para el álgebra Λ' , donde los lazos especiales S_p son $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ y ε_3 , con las siguientes relaciones: $c_3 \leq a_1 \leq b_1^{-1}$, $c_1 \leq c_2 \leq a_2^{-1}$, $a_2 \leq a_3 \leq b_3^{-1}$ y $b_1 < c_i^{-1}$ para $i = 1, 2, 3$.

Recordemos que, una palabra en un clan C es una sucesión formal $w_1 w_2 \dots w_n$ de letras, con $n > 0$, tal que para cada i se cumple que $s(w_i) = t(w_{i+1})$ y las letras w_i^{-1} y w_{i+1} son incomparables.

Consideremos las siguientes bandas $\alpha = a_1 a_2^{-1} a_3$ y $\beta = a_1 b_2 \varepsilon_2^* c_2 c_3^{-1} \varepsilon_3^* b_3^{-1}$. Observe que a_3^{-1} y a_1 son incomparables, al igual que b_3 y a_1 , esto implica que el producto $\alpha\beta$ y $\beta\alpha$ está bien definido y además son bandas, por tanto Λ' es un álgebra de crecimiento exponencial y por el Lema 4.5.3 tenemos que Λ también lo es. Finalmente, como hemos mencionado en la Observación 3, la mutación de carcaj con potencial preserva crecimiento exponencial, por tanto todo álgebra Jacobiana asociada a una triangulación de una esfera con 5 punciones es también de crecimientos exponencial. □

Bibliografía

- [AIRT12] Claire Amiot, Osamu Iyama, Idun Reiten, and Gordana Todorov. Preprojective algebras and c -sortable words. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 104(3):513–539, 2012.
- [Ami] Claire Amiot. On generalized cluster categories. arXiv:1101.3675.
- [Ami09] Claire Amiot. Cluster categories for algebras of global dimension 2 and quivers with potential. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 59(6):2525–2590, 2009.
- [ARO97] Maurice Auslander, Idun Reiten, and SmaløSverre O. *Representation theory of Artin algebras*, volume 36 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Corrected reprint of the 1995 original.
- [AS87] Ibrahim Assem and Andrzej Skowroński. Iterated tilted algebras of type \tilde{A}_n . *Math. Z.*, 195(2):269–290, 1987.
- [ASS06] Ibrahim Assem, Daniel Simson, and Andrzej Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, volume 65 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. Techniques of representation theory.
- [Aus71] Maurice Auslander. *Dimension representation of Artin algebras*. Queen Mary College Mathematical Notes, London, 1971.
- [BD] David Berenstein and Michael R Douglas. Seiberg duality for quiver gauge theories. hep-th/0207027.
- [BG12] Michael Barot and Christof Geiss. Tubular cluster algebras I: categorification. *Math. Z.*, 271(3-4):1091–1115, 2012.

- [BIKR08] Igor Burban, Osamu Iyama, Bernhard Keller, and Idun Reiten. Cluster tilting for one-dimensional hypersurface singularities. *Adv. Math.*, 217(6):2443–2484, 2008.
- [BIRS11] Aslak Bakke Buan, Osamu Iyama, Idun Reiten, and David Smith. Mutation of cluster-tilting objects and potentials. *Amer. J. Math.*, 133(4):835–887, 2011.
- [BMR⁺06] Aslak Bakke Buan, Robert Marsh, Markus Reineke, Idun Reiten, and Gordana Todorov. Tilting theory and cluster combinatorics. *Adv. Math.*, 204(2):572–618, 2006.
- [BMR07] Aslak Bakke Buan, Robert J. Marsh, and Idun Reiten. Cluster-tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(1):323–332 (electronic), 2007.
- [Bra03] Volker Braun. On Berenstein-Douglas-Seiberg duality. *J. High Energy Phys.*, (1):082, 21, 2003.
- [BS02] Jerzy Białkowski and Andrzej Skowroński. Selfinjective algebras of tubular type. *Colloq. Math.*, 94(2):175–194, 2002.
- [BT13] Michael Barot and Sonia Trepode. Cluster tilted algebras with a cyclically oriented quiver. *Comm. Algebra*, 41(10):3613–3628, 2013.
- [BZ11] Thomas Brüstle and Jie Zhang. On the cluster category of a marked surface without punctures. *Algebra Number Theory*, 5(4):529–566, 2011.
- [CB89] W. W. Crawley-Boevey. Functorial filtrations. III. Semidihedral algebras. *J. London Math. Soc. (2)*, 40(1):31–39, 1989.
- [CB95] William Crawley-Boevey. Tameness of biserial algebras. *Arch. Math. (Basel)*, 65(5):399–407, 1995.
- [CCS06] P. Caldero, F. Chapoton, and R. Schiffler. Quivers with relations arising from clusters (A_n case). *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358(3):1347–1364, 2006.
- [DF73] Peter Donovan and Mary Ruth Freislich. Some evidence for an extension of the Brauer-Thrall conjecture. *Sonderforschungsbereich Theor. Math*, 40, 1973.
- [DM] Michael R Douglas and Gregory Moore. D-branes, quivers, and ale instantons. arXiv preprint hep-th/9603167.

- [Dro80] Yuriy Drozd. Tame and wild matrix problems. In *Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979)*, volume 832 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 242–258. Springer, Berlin, 1980.
- [DWZ08] Harm Derksen, Jerzy Weyman, and Andrei Zelevinsky. Quivers with potentials and their representations. I. Mutations. *Selecta Math. (N.S.)*, 14(1):59–119, 2008.
- [Erd88a] Karin Erdmann. Algebras and quaternion defect groups. II. *Math. Ann.*, 281(4):545–560, 561–582, 1988.
- [Erd88b] Karin Erdmann. On the number of simple modules of certain tame blocks and algebras. *Arch. Math. (Basel)*, 51(1):34–38, 1988.
- [Erd90] Karin Erdmann. *Blocks of tame representation type and related algebras*, volume 1428 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [ES06] Karin Erdmann and Andrzej Skowroński. The stable Calabi-Yau dimension of tame symmetric algebras. *J. Math. Soc. Japan*, 58(1):97–128, 2006.
- [ES08] Karin Erdmann and Andrzej Skowroński. Periodic algebras. In *Trends in representation theory of algebras and related topics*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 201–251. Eur. Math. Soc., Zürich, 2008.
- [FG07] Vladimir V. Fock and Alexander B. Goncharov. Dual Teichmüller and lamination spaces. In *Handbook of Teichmüller theory. Vol. I*, volume 11 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 647–684. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
- [FST08] Sergey Fomin, Michael Shapiro, and Dylan Thurston. Cluster algebras and triangulated surfaces. I. Cluster complexes. *Acta Math.*, 201(1):83–146, 2008.
- [FZ02] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497–529 (electronic), 2002.
- [GdlP99] Christof Geiss and José Antonio de la Peña. Auslander-Reiten components for clans. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)*, 5(2):307–326, 1999.

- [Gei95] Christof Geiss. On degenerations of tame and wild algebras. *Arch. Math. (Basel)*, 64(1):11–16, 1995.
- [GGS] Christof Geiss and Raúl González-Silva. Tubular Jacobian algebras. arXiv:1306.3935.
- [GKO13] Christof Geiss, Bernhard Keller, and Steffen Oppermann. n -angulated categories. *J. Reine Angew. Math.*, 675:101–120, 2013.
- [GLFS] Christof Geiss, Daniel Labardini-Fragoso, and Jan Schröer. The representation type of Jacobian algebras. arXiv:1308.0478.
- [GLS05] Christof Geiss, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. *Semicanonical bases and preprojective algebras*, volume 38. 2005.
- [GLS08] Christof Geiss, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. Preprojective algebras and cluster algebras. In *Trends in representation theory of algebras and related topics*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 253–283. Eur. Math. Soc., Zürich, 2008.
- [GS71] Silvio Greco and Paolo Salmon. *Topics in m -adic topologies*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 58. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.
- [Hap88] Dieter Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, volume 119 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [Hat91] Allen Hatcher. On triangulations of surfaces. *Topology Appl.*, 40(2):189–194, 1991.
- [Hel59] Alex Heller. A note on spaces with operators. *Illinois J. Math.*, 3:98–100, 1959.
- [HI11] Martin Herschend and Osamu Iyama. Selfinjective quivers with potential and 2-representation-finite algebras. *Compos. Math.*, 147(6):1885–1920, 2011.
- [Iva02] Nikolai V. Ivanov. Mapping class groups. In *Handbook of geometric topology*, pages 523–633. North-Holland, Amsterdam, 2002.

- [IY08] Osamu Iyama and Yuji Yoshino. Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules. *Invent. Math.*, 172(1):117–168, 2008.
- [Iya07] Osamu Iyama. Higher-dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories. *Adv. Math.*, 210(1):22–50, 2007.
- [Iya11] Osamu Iyama. Cluster tilting for higher Auslander algebras. *Adv. Math.*, 226(1):1–61, 2011.
- [KR07] Bernhard Keller and Idun Reiten. Cluster-tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi-Yau. *Adv. Math.*, 211(1):123–151, 2007.
- [KY11] Bernhard Keller and Dong Yang. Derived equivalences from mutations of quivers with potential. *Adv. Math.*, 226(3):2118–2168, 2011.
- [Lada] Sefi Ladkani. Algebras of quasi-quaternion type. arXiv:1404.6834v1.
- [Ladb] Sefi Ladkani. On symmetric Jacobian algebras. Second ARTA conference, Torun 2013.
- [Ladc] Sefi Ladkani. On Jacobian algebras from closed surfaces. arXiv:1207.3778.
- [LFa] Daniel Labardini-Fragoso. On triangulations, quivers with potentials and mutations. arXiv:1302.1936.
- [LFb] Daniel Labardini-Fragoso. Quivers with potentials associated to triangulated surfaces, part iv: Removing boundary assumptions. arXiv:1206.1798v1.
- [LF09] Daniel Labardini-Fragoso. Quivers with potentials associated to triangulated surfaces. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 98(3):797–839, 2009.
- [MP14] Robert J. Marsh and Yann Palu. Coloured quivers for rigid objects and partial triangulations: the unpunctured case. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 108(2):411–440, 2014.
- [Nak39] Tadasi Nakayama. On Frobeniusean algebras. I. *Ann. of Math. (2)*, 40:611–633, 1939.

- [Nak41] Tadasi Nakayama. On Frobeniusean algebras. II. *Ann. of Math. (2)*, 42:1–21, 1941.
- [Nee01] Amnon Neeman. *Triangulated categories*, volume 148 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [Nes38] Cecil Nesbitt. On the regular representations of algebras. *Ann. of Math. (2)*, 39(3):634–658, 1938.
- [NR73] Lyudmila Aleksandrovna Nazarova and Andrey Vladimirovich Roiter. *Categorical matrix problems and the Brauer-Thrall conjecture*. Inst. Math. Acad. Sci. Kiev, 1973.
- [Pla11] Pierre-Guy Plamondon. Cluster characters for cluster categories with infinite-dimensional morphism spaces. *Adv. Math.*, 227(1):1–39, 2011.
- [Pup62] Dieter Puppe. On the formal structure of stable homotopy theory. In *Colloquium on algebraic topology*, pages 65–71. 1962.
- [QZ] Yu Qiu and Yu Zhou. Cluster categories for marked surfaces: punctured case. arXiv:1311.0010v1.
- [Rie80] Christine Riedtmann. Representation-finite self-injective algebras of class A_n . In *Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979)*, volume 832 of *Lecture Notes in Math.*, pages 449–520. Springer, Berlin, 1980.
- [Rie83] Christine Riedtmann. Representation-finite self-injective algebras of class D_n . *Compositio Math.*, 49(2):231–282, 1983.
- [Rin84] Claus Michael Ringel. *Tame algebras and integral quadratic forms*, volume 1099 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Rin08] Claus Michael Ringel. The self-injective cluster-tilted algebras. *Arch. Math. (Basel)*, 91(3):218–225, 2008.
- [RSS80] Gian-Carlo Rota, Bruce Sagan, and Paul R. Stein. A cyclic derivative in noncommutative algebra. *J. Algebra*, 64(1):54–75, 1980.

- [RVdB02] Idun Reiten and Michel Van den Bergh. Noetherian hereditary abelian categories satisfying Serre duality. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):295–366, 2002.
- [Sch08] Ralf Schiffler. A geometric model for cluster categories of type D_n . *J. Algebraic Combin.*, 27(1):1–21, 2008.
- [Sko87] Andrzej Skowroński. Group algebras of polynomial growth. *Manuscripta Math.*, 59(4):499–516, 1987.
- [Sko06] Andrzej Skowroński. Selfinjective algebras: finite and tame type. In *Trends in representation theory of algebras and related topics*, volume 406 of *Contemp. Math.*, pages 169–238. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [Spr57] George Springer. *Introduction to Riemann surfaces*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1957.
- [ST80] Herbert Seifert and William Threlfall. *Seifert and Threlfall: a textbook of topology*, volume 89 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980. Translated from the German edition of 1934 by Michael A. Goldman, With a preface by Joan S. Birman, With “Topology of 3-dimensional fibered spaces” by Seifert, Translated from the German by Wolfgang Heil.
- [SW83] Andrzej Skowroński and Josef Waschbüsch. Representation-finite biserial algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 345:172–181, 1983.
- [SY11] Andrzej Skowroński and Kunio Yamagata. *Frobenius algebras. I*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2011. Basic representation theory.
- [TVD] Sonia Trepode and Yadira Valdivieso-Díaz. On finite dimensional jacobian algebras. arXiv:1207.1917.
- [VD] Yadira Valdivieso-Díaz. On Auslander-Reiten translation in cluster categories associated to closed surfaces. arXiv:1309.2708.

- [Ver77] Jean-Louis Verdier. Catégories dérivées. In *état 0*, in: *Cohomologie étale(SGA 4)*, volume 569 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 262–308. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [ZZZ13] Jie Zhang, Yu Zhou, and Bin Zhu. Cotorsion pairs in the cluster category of a marked surface. *J. Algebra*, 391:209–226, 2013.